Г. И. Белявский, **Н. Д. Никоненко** (Ростов-на-Дону, ЮФУ). **Вычисление оптимального среднеквадратичного хеджа для минимальной меры при дискретной аппроксимации экспоненциального процесса Леви.**

В [1] введено понятие минимальной мартингальной меры, которая определяется следующим образом.

Эквивалентная мартингальная мера $\widehat{P} \in \mathcal{P}$ называется *минимальной мартингальной мерой*, если $\mathbf{E}\,[d\widehat{P}/dP]^2 < \infty$ и любой P-мартингал, строго ортогональный исходному процессу S, является и $\widehat{P}$-мартингалом.

Будем рассматривать пуассоновскую модель (B, S)-рынка. Эволюция рискового актива определяется уравнением

$$S_n = S_{n-1} e^{h_n}, \tag{1}$$

где $h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$ и ε_n — независимые и одинаково распределенные по закону Пуассона случайные величины, т. е. $p\,\{\varepsilon_n = k\} = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$. Рассматривается естественная фильтрация $F_n = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Относительно фильтрации параметры μ_n, σ_n модели предсказуемы. Банковский счет

$$B_n = (1 + r) B_{n-1}, \tag{2}$$

где r — константа. Не нарушая общности, будем считать, что $r = 0$. Модель (1)–(2) рассматривалась в работах [2, 3]. Рассмотрим случай, когда μ_n, σ_n являются константами.

Введем обозначения: $\delta_n^2 = \operatorname{var}(\mathbf{E}\,(\Delta S_n | F_{n-1})) = \mathbf{E}\,(\Delta S_n^2 | F_{n-1}) - \alpha_n^2$, где $\alpha_n^2 = (\mathbf{E}\,(\Delta S_n | F_{n-1}))^2$.

Для нахождения минимальной мартингальной меры воспользуемся следующей теоремой.

Теорема [1]. *Если $\Delta S_n \mathbf{E}\,(\Delta S_n | F_{n-1}) < \mathbf{E}\,((\Delta S_n)^2 | F_{n-1})$ для всех n P-п. н. $\{\sigma \neq 0\}$ и $\alpha_n^2 \leqslant C\delta_n^2$ P-п. н., то существует единственная минимальная мартингальная мера $\widehat{P}$ (эквивалентная данной), причем*

$$\frac{d\widehat{P}}{dP} = Z_N, \quad Z_n = \mathbf{E}\,(Z_N | F_n), \quad Z_n = \prod_{s=1}^{n} (1 + \gamma_s \Delta Y_s), \quad \gamma_s = -\frac{\alpha_s}{\delta_s^2} \ \mathrm{P} - п.\ н.\ \{\delta_s^2 \neq 0\}, \tag{3}$$

где Y — P-мартингал из разложения Дуба процесса цены рискового актива (1).

Поскольку

$$\frac{\alpha_n^2}{\delta_n^2} = \frac{e^{2\lambda(e^\sigma - 1)} - 2e^{\lambda(e^\sigma - 1) - \mu)} + e^{-2\mu}}{e^{\lambda(e^{2\sigma - 1})} - e^{2\lambda(e^\sigma - 1)}} = \mathrm{const},$$

условие $\alpha_n^2 \leqslant C\delta_n^2$ теоремы выполняется. Введем обозначения $A = e^{\mu + \lambda(e^\sigma - 1)}$, $B = e^{\mu + \lambda(e^\sigma - 1)} - e^{\lambda(e^\sigma - 1)}$. Для выполнения первого условия теоремы достаточно выполнения одного из четырех условий: a) $A = 0$; b) $A > 0$, $\sigma < 0$, $A \leqslant B$; c) $A < 0$, $\sigma > 0$, $A \leqslant B$; d) $A < 0$, $\sigma < 0$, $B \geqslant 0$.

Допустим, одно из этих условий выполнено. Тогда процесс плотности (3) принимает вид $Z_n = \prod_{s=1}^{n} (Ce^{\sigma\varepsilon_s} + D)$, где $A = e^{\mu + \lambda(e^{2\sigma} - 1)} - e^{\lambda(e^\sigma - 1)}$, $B = e^{\mu}(e^{\lambda(e^{2\sigma} - 1)} - e^{2\lambda(e^\sigma - 1)})$, $C = (1 - e^{\mu + \lambda(e^\sigma - 1)})/B$, $D = A/B$.

Данная плотность отличается от плотности, полученной в результате применения преобразования Гирсанова и Эшера:

$$Z_n = \exp\left\{N\lambda - \frac{N\mu}{1 - e^\sigma} + \ln \frac{\mu}{\lambda(1 - e^\sigma)} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k\right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Follmer H.*, *Schied A.* Stochastic finance: an introduction in discrete time. Berlin, New York: 2004, 459 с.
2. *Белявский Г. И.*, *Никоненко Н. Д.* Алгоритм вычисления оптимальной мартингальной меры для условно-пуассоновского распределения логарифмического возврата. — Известия вузов. Сев.-Кавк. регион. Технические науки, 2009, № 4, с. 11–14.
3. *Никоненко Н.Д.* Хеджирование для пуассоновской модели (B, S)-рынка. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 2, с. 288–289.