К. К. Рыбников, О. К. Чернобровина (Мытищи, МГУ леса). **Полиэдральный подход к анализу некоторых узлов преобразований электронных схем. Целочисленные многогранники.**

Полиэдральный подход к анализу узлов электронных преобразователей, работа которых описывается системой булевых уравнений

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \tag{1}$$

заключается в построении многогранника $M(A, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} | A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant 0\}$, где $A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$ — система линейных неравенств с матрицей $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ — вектор с неотрицательными значениями компонент-переменных, который обладает свойством

$$G \subseteq M(A, \mathbf{b}), \qquad (2),$$

где G — множество решений системы (1).

Такой подход получил в литературе название *метода разделяющих плоскостей* (см., например, [1]). Построение многогранника позволяет использовать для решения системы булевых уравнений аппарат целочисленного линейного программирования. В этом случае особый интерес вызывает случай, когда многогранник является целочисленным и совпадает с множеством G.

Результаты работ [2, 3] могут быть положены в основу способа построения системы (1), удовлетворяющей условию (2), по заданному целочисленному многограннику, который представляют авторы.

Систему булевых уравнений (1) можно представить в виде

$$K_1^i \vee K_2^i \vee \dots \vee K_{S_i}^i, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \tag{3}$$

где K_j^ℓ $(j = 1, 2, \dots, S_i,\ \ell = 1, 2, \dots, m)$ — многоместные конъюнкции, т. е. $K_j^\ell = X_{i_1}^{\delta_1} \& X_{i_2}^{\delta_2} \& \dots \& X_{i_{r_{\ell,j}}}^{\delta_{r_{\ell,j}}}$, $\delta_k \in \{0, 1\}$, $X_{i_k}^0 = \overline{X}_{i_k}$, $X_{i_k}^1 = X_{i_k}$, $K = 1, 2, \dots, r_{\ell,j}$.

Ясно, что система уравнений (1) удовлетворяется тогда и только тогда, когда все конъюнкции, входящие в нее, принимают значение 0. Условие $K_j^\ell = 0$ эквивалентно условию, соответствующему псевдобулеву неравенству

$$a_{i_1} x_{i_1} + a_{i_2} x_{i_2} + \dots + a_{i_{r_{\ell,j}}} x_{i_{r_{\ell,j}}} \leqslant r_{\ell,j} - \overline{r}_{\ell,j} - 1, \tag{4}$$

где

$$a_{i_t} = \begin{cases} 1, & \text{если } \delta_{i_t} = 1, \\ -1, & \text{если } \delta_{i_t} = 0, \end{cases} \qquad t = 1, 2, \dots, r_{\ell,j}, \tag{5}$$

а $\overline{r}_{\ell,j}$ — число переменных, входящих в конъюнкцию K_j^ℓ с отрицанием.

Для того чтобы многогранник $M(A, \mathbf{b})$, определенный системой неравенств вида (4)–(5), был целочисленным, достаточно матрицу этой системы выбрать абсолютно унимодулярной, т. е. такой, чтобы все ее миноры были равны 0 или ± 1 (результат Гофмана и Краскала, см., например, [4]). Выбор всех таких матриц определяет все целочисленные многогранники, соответствующие системе (3).

Более просто построить целочисленный многогранник можно, используя достаточные условия абсолютной унимодулярности матрицы системы (3) (результат Хеллера и Томпкинса, см., например, [4]). В соответствии с этим результатом в матрице каждый ее столбец должен содержать не более двух ненулевых элементов. При этом сроки матрицы должны допускать разбиение на два таких непересекающихся множества R_1 и R_2, что: а) два ненулевых элемента в любом столбце, знаки которых совпадают, не входят в одно и то же множество R_i; б) два ненулевых элемента в любом столбце, знаки которых не совпадают, входят в одно и то же множество R_i.

Таким образом, построив в соответствии с этими результатами целочисленный многогранник $M(A, \mathbf{b})$, а затем систему (1) по соотношениям (3), получаем, что множество G совпадает с множеством вершин $M(A, \mathbf{b})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никонов В. Г.*, *Рыбников К. К.* Применение полиэдральных методов в прикладных математических задачах, сводящихся к анализу и решению систем линейных неравенств. — Вестник МГУ леса. Лесной вестник, 2003, № 1, с. 69–73.
2. *Рыбников К. К.* Оценки сложности некоторых схем метода разделяющих плоскостей при решении систем булевых уравнений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2002, т. 9, в. 2, с. 442–443.
3. *Рыбников К. К.*, *Ласковая Т. А.* Полиэдральные модели узлов преобразований в нейросетях. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 1, с. 144–145.
4. *Ковалев М. М.* Дискретная оптимизация. Целочисленное программирование. М.: Едиториал УРСС, 2003, 192 с.