А. В. Томилин, К. В. Халкечев (Москва, МГГУ). **Математическое моделирование деформирования горных пород с сильно коррелированными ориентациями структурных и текстурных составляющих в пространстве.**

В отличие от многих физических процессов, при научном исследовании геоматериалов с сильно коррелированными ориентациями структурных и текстурных составляющих в пространстве возможности проведения натурального эксперимента весьма ограничены, а часто и вообще отсутствуют. В результате математическое моделирование остается практически основным методом исследования таких геоматериалов.

Вместе с тем, в породном массиве существует достаточное количество горных пород, в которых при деформировании структурные и текстурные элементы меняют свою случайную ориентацию в пространстве на сильно коррелированную, что сильно влияет на механические свойства данных пород. Данное явление проявляется довольно часто как в нетронутом породном массиве под действием тектонических сил, так и при перераспределении напряжений во время ведения горных работ.

Для нахождения эффективных упругих модулей кристаллических геоматериалов с сильно коррелированными ориентациями структурных составляющих в пространстве необходимо воспользоваться следующей математической моделью.

Предполагаем, что горная порода заполняет объем $V \geqslant V_C$, где V_C — структурный элементарный объем [1]. Трехмерная неограниченная анизотропная упругая среда, которую назовем *основной*, с неоднородностями и в эллипсоидальных областях $V(x)$, где $x = (x^1, x^2, x^3)$ — точки среды. Эти эллипсоидальные области плотно прилегают друг к другу и соответствуют зернам минералов и пород. Обозначим C_0 постоянный тензор упругих модулей основной среды, равный осредненным значениям тензора упругих модулей отдельного зерна $\langle C \rangle$, а $C_0 + C_1$ — то же для эллипсоидальной неоднородности.

Отсюда следует, что тензор упругих модулей среды с неоднородностями можно представить в виде кусочно-постоянной функции $C(x) = C_0 + c_1 V(x)$, где $V(x)$ — характеристическая функция области V, занятой неоднородностями, т. е. $V(x) = 1$ при $x \in V$ и $V(x) = 0$ при $x \notin V$. Но так как в рассматриваемой модели неоднородности плотно прилегают друг к другу, всегда $V(x) = 1$. Пусть $\varepsilon_0(x)$ — непрерывное внешнее поле деформаций, которое существовало бы при $C_1 = 0$ в основной однородной среде при заданных внешних силах; $\varepsilon(x)$ — кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях.

При этом предполагаем, что эллипсоидальные области сильно коррелированны в пространстве и подчиняются обобщенному закону Гука:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C^e_{ijkl} \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = S^e_{ijkl} \langle \sigma_{ij} \rangle, \tag{1}$$

где C^e_{ijkl} и S^e_{ijkl} — анизотропные эффективные тензоры.

В рамках метода самосогласованного поля [2] имеем поле деформации внутри неоднородности, которое записывается в следующем виде:

$$\varepsilon = (I + AC_1)^{-1} \varepsilon', \tag{2}$$

где ε' состоит из внешнего поля и поля, наведенного другими неоднородностями.

Среднюю деформацию $\langle \varepsilon \rangle$ среды с неоднородностями получим, осредняя (2) по ансамблю реализации случайного поля неоднородностей, при этом учитываем, что, если совокупность элементов, составляющих породную частицу, можно разбить на классы эквивалентности по некоторому признаку, который может принимать конечное число значений, то суммирование можно заменить интегрированием:

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon' \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi} (I + AC_1)^{-1} f(\varphi, \theta, \psi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, d\psi. \tag{3}$$

Учитывая, что деформирование каждой из неоднородностей описывается законом Гука, умножим левую и правую части выражения (2) на $\langle\sigma\rangle$ и, осреднив, получим выражение для напряжений внутри любой неоднородности:

$$\langle\sigma\rangle = \varepsilon' \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} C(I + AC_1)^{-1} f(\varphi,\theta,\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi. \tag{4}$$

Подставим значение $\langle\varepsilon\rangle$ из (3) и $\langle\sigma\rangle$ из (4) в (1) и получим выражения для тензоров эффективных упругих податливостей и эффективных упругих модулей, которые в компонентной форме имеют вид

$$\begin{aligned} C^e_{ijkl} = \Big[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} C_{mnrt}(I_{ijmn} + A_{ijpq}C^1_{pqmn})^{-1} f(\varphi,\theta,\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi \Big] \\ \times \Big[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (I_{ijmn} + A_{ijpq}C^1_{pqmn})^{-1} f(\varphi,\theta,\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi \Big]^{-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $i,j,m,n,r,t,p,q,k,l = 1,2,3$.

Для нахождения эффективных упругих модулей горных пород с сильно коррелированными ориентациями текстурных составляющих в пространстве рассмотрим неограниченную трехмерную упругую однородную среду (основную) с неоднородностями в эллипсоидальных областях V_i, которым соответствуют текстурно-составляющие. Свойство основной среды определяет тензор эффективных модулей упругости C_e (5), $C_e + C_1$ — то же для эллипсоидальных неоднородностей, где C_1 — случайный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности. Пусть $\varepsilon_0(r)$ — непрерывное внешнее поле деформаций, которое при заданных внешних силах (включая условия на бесконечности) существовало бы при $C_1 = 0$ в однородной среде; $\varepsilon(r)$ — кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях.

Для тензора эффективных упругих податливостей имеем

$$\begin{aligned} S^{ef}_{ijkl} = S^e_{ijkl} - S^e_{ijkl}\Big[I + \frac{1}{n}\int K(R)F(R)\, dV \Big]^{-1} S^e_{ijkl} \\ \times \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{V_0}{V} C^1_{ijkl}(I_{mnij} + A_{mnpq}C^1_{pqij})^{-1} f(\varphi,\theta,\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi, \end{aligned} \tag{6}$$

где V_0 — объем неоднородности; V — объем среды, приходящийся на каждую неоднородность; n — концентрация неоднородностей; для построения функции $F(R)$ под интегралом в данном выражении необходимо задаться конкретной моделью случайного поля неоднородностей в среде; S^e_{ijkl} определяется из формулы (5).

Поле напряжений для горных пород с сильно коррелированными ориентациями структурных и текстурных составляющих в пространстве в рамках принятых моделей имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = C_{mnrt}(I_{ijmn} + A_{ijpq}C^1_{pqmn})^{-1} \\ \times \Big[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{V_0}{V} C^1_{rtkl}(I_{rtkl} + A_{rtpq}C^1_{pqkl})^{-1} f(\varphi,\theta,\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi \Big]^{-1} \sigma^0_{kl}, \end{aligned} \tag{7}$$

где σ_0 — внешнее поле напряжений, в котором находится горная порода в целом; $i,j,m,n,r,t,p,q,k,l = 1,2,3$;

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \Big[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} C_{mnrt}(I_{ijmn} + A_{ijpq}C^1_{pqmn})^{-1} f(\varphi,\theta,\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi \Big] \\ \times (I_{ijmn} + A_{ijpq}C_{pqmn})^{-1} \Big[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (I_{ijmn} + A_{ijpq}C^1_{pqmn})^{-1} \end{aligned}$$

$$\times f(\varphi,\theta,\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi\Big]^{-1}\Big[I+\frac{1}{n}\int K(R)F(R)\,dV\Big]^{-1}\varepsilon_{ij}^{0}. \qquad (8)$$

Таким образом, формула (8) отражает поле напряжений в горных породах с сильно коррелированными ориентациями текстурных составляющих в пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Халкечев К. В.* Механика неоднородных горных пород. Бишкек: Илим, 1991, 250 с.
2. *Канаун С.К.* О приближении самосогласованного поля для упругой композитной среды. — ПМТФ, 1977, № 2, с. 234–237.