Г. В. М и р о н е н к о (Ростов-на-Дону, ЮФУ). **Алгоритм метода ветвей и границ для рюкзака с группами.**

Определенный класс оптимизационных задач, часто возникающий в экономике, прикладной математике и криптографии, представимый в виде

$$\sum_{i=1}^{N} p_i x_i \to \max_{\overline{x}}, \quad \sum_{i=1}^{N} v_i x_i \leqslant \beta, \quad \overline{p}, \overline{v} \in \mathbf{R}^N, \quad \beta \in \mathbf{R}, \quad \overline{x} \in (0,1]^N, \tag{1}$$

называют *дискретным вариантом* «задачи о рюкзаке» [1]. Данная задача является NP-полной. Однако если есть какие-то особенности решаемой задачи, то она может быть решена относительно быстро, за полиномиальное время.

В докладе описывается алгоритм решения класса задач о ранце полиномиальной сложности. Рассматриваемые задачи позволяют предварительно разбить исходные данные на группы, в которых элементы не отличаются своими параметрами. Предлагаемый алгоритм является модификацией метода ветвей и границ (ВГ).

Алгоритм.

1. Разбиваем предметы, N штук, на M групп и упорядочиваем группы по убыванию относительно полезности к весу. Для каждой группы известны: полезность предмета, вес предмета.

2. Ветвление организуем следующим образом: все множество вариантов $Nodes$ делим на два помножества: $Nodes = node[i,j] \cup \overline{node[i,j]}$, где $node[i,j]$ — множество вариантов, отвечающее выбору j штук из группы i (или отсутствию этого выбора).

3. Для удовлетворения условия «граничности» на каждом узле аналогично стандартному методу ВГ вводится мажорирующая P — полезность рюкзака, функция $\varphi = \mathrm{Emp} * k_i$, где Emp — пустое место, имеющееся в наличии на данном узле, k_i — полезность/вес в i-й группе.

Утверждение. *Сложность данного алгоритма равна* $\prod_{i=1}^{m}(k[i]+1)$, *где* m — *число групп, на которые разбито множество элементов*, $k[i]$ — *число элементов в* i*-й группе.*

Одна из задач финансовой математики, которая сводится к задаче о рюкзаке с группами, — это задача квантильного хеджирования в модели Кокса–Росса–Рубенштейна. Квантильное хеджирование сводится к решению оптимизационной задачи

$$P(A) = EI_{A^\pi} \to \max, \quad C^*_{A^\pi} = E^*(f_N I_{A^\pi}) \leqslant \lambda E^* f_n, \qquad 0 < \lambda < 1,$$

которая, в свою очередь, сводится к следующей задаче:

$$P(A) = EI_{A^\pi} \to \max, \quad \widetilde{P}(A^\pi) = \widetilde{E} I_{A^\pi} \leqslant \alpha, \quad \text{где} \quad \widetilde{E} I_{A^\pi} = E^* I_{A^\pi} \frac{f_N(\omega)}{E^* f_n}.$$

Отметим, что в работе [2] данная задача решается на основе леммы Неймана–Пирсона, которая в дискретном случае в данной задаче не применима, поскольку может не существовать такого множества $A^\pi \in F$, для которого $\widetilde{E} I_{A^\pi} = \alpha$.

Данная задача относится к задаче о рюкзаке с $N+1$ группой и может быть решена не более, чем за $\prod_{i=1}^{N}(C_N^i + 1)$ шагов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Martello S.*, *Toth P.* Knapsack problems. — Algorithms and computer implementations, 1990, c. 29–36, 167–176, 222–224.
2. *Мельников А. В.*, *Волков С. Н.*, *Нечаев М. Л.* Математика финансовых обязательств, глава 6.2. М.: ГУ ВШЭ, 2001, с. 139–159.