Н. А. Соколов (Москва, ЦЭМИ РАН). **Критерий окончания счета в обобщенном методе уровней для решения вариационных неравенств, определяемых монотонными отображениями.**

В [1] был предложен метод оракульного типа (ненормированный вариант) для решения различных задач, в том числе для решения вариационных неравенств. Вариационное неравенство имеет вид $\langle T(z), z'-z\rangle \geqslant 0$ для всех $z' \in \overline{G}$, где в дальнейшем предполагается, что: $\overline{G}$ — выпуклый компакт в евклидовом пространстве $\mathbf{E}$; $T\colon\ \overline{G} \to \mathbf{E}$ — точечно-множественное отображение, для которого $T(z)$ — выпуклый компакт для любого $z \in \overline{G}$; отображение T монотонно (т.е. $\langle t'-t', z'-z''\rangle \geqslant 0$ для любых $z', z'' \in \overline{G}$, $t' \in T(z')$, $t'' \in T(z'')$) и полунепрерывно сверху на $\overline{G}$ (откуда следует существование такого числа L, что $\|t\| \leqslant L$ для любых $t \in T(z)$, $z \in \overline{G}$).

Обозначим G^* (непустое) множество решений вариационного неравенства, т. е. множество таких точек $z^* \in \overline{G}$, что $\langle t^*, z-z^*\rangle \geqslant 0$ для некоторого $t^* \in T(z^*)$ выполняется при всех $z \in \overline{G}$. Под *мерой близости* точки $z \in \overline{G}$ к множеству G^* будем понимать введенную и исследованную в [2] функцию $\Delta(z) \equiv \max_{t' \in T(z'),\, z \in \overline{G}} \langle t', z-z'\rangle$, неотрицательную на $\overline{G}$, при этом $\Delta(z)=0$ лишь для точек $z \in G^*$.

В [2] метод уровней был обобщен на случай, когда имеется G — выпуклый многогранник в $\mathbf{E}$, содержащий $\overline{G}$. Для любой точки $z' \in G$ оракул определяет, принадлежит ли она множеству $\overline{G}$ или нет. Если $z' \in \overline{G}$, то оракул выдает (как в [1]) некоторый элемент $t' \in T(z')$, в противном случае он задает вектор $a(z')$ единичной длины и неотрицательный скаляр $\alpha(z')$, для которых $\langle a(z'), z-z'\rangle + \alpha(z') \leqslant 0$ для всех $z \in \overline{G}$.

Опишем схему обобщенного метода уровней (нормированный вариант [2]) применительно к решению вариационных неравенств.

0. Выбираются начальная точка $z_1 \in G$ и число $\lambda \in (0,1)$.

1. Перед началом k-й итерации заданы точки $z_i \in G$, $i \in I_k = \{1,\dots,k\}$, определены множества $I_k^1 = \{i \in I_k\colon\ z_i \in \overline{G}\}$, $I_k^2 = I_k \setminus I_k^1$. В начале итерации оракул сообщает свой ответ в точке z_k (обозначим $t_i = t(z_i)$, $i \in I_k^1$, $a_i = a(z_i)$, $\alpha_i = \alpha(z_i)$, $i \in I_k^2$).

2. Решается задача линейного программирования $\mathcal{A}_k$ вида

$$\tau \to \max, \quad \langle t_i, z-z_i\rangle + \|t_i\|\tau \leqslant 0,\ i \in I_k^1,\ \langle a_i, z-z_i\rangle + \alpha_i + \tau \leqslant 0,\ i \in I_k^2,\ z \in G. \quad (1)$$

Обозначим Δ_k максимальное значение задачи $\mathcal{A}_k$, $\Delta_k \geqslant 0$. При $\Delta_k = 0$ итерационный процесс заканчивается, переход к шагу 5.

3 (**Критерий останова**). Пусть $\mu = \{\mu_i;\ i \in I_k^1\}$ — компоненты оптимального плана задачи, двойственной к $\mathcal{A}_k$, $\overline{\mu} = \sum_{i \in I_k^1} \mu_i$. Если $\overline{\mu} = 0$, то переход к шагу 4. Иначе вычисляется точка $z_k^* = \sum_{i \in I_k^1} \mu_i z_i / \overline{\mu}$. Если $\Delta(z_k^*)$ «достаточно мала», то итерационный процесс прерывается, иначе переход к шагу 4.

4. Новая точка z_{k+1} определяется как проекция точки z_k на множество $Q_k(\lambda, \Delta_k)$, т. е. решается задача квадратичного программирования $\mathcal{B}_k$ вида

$$\|z-z_k\|^2 \to \min, \quad z \in Q_k(\lambda, \Delta_k),$$

где $Q_k(\lambda, \Delta_k) = \{z \in G\colon\ \langle t_i, z-z_i\rangle + \|t_i\|\lambda\Delta_k \leqslant 0,\ i \in I_k^1,\ \langle a_i, z-z_i\rangle + \alpha_i + \lambda\Delta_k \leqslant 0,\ i \in I_k^2\}$, и итерационный процесс повторяется на $(k+1)$-й итерации (переход к шагу 1).

5. STOP

Теорема 1 [2]. *Пусть множество $\overline{G}$ диаметра d содержит шар радиуса $r > 0$. При $k > d^2/[r^2\lambda^2(1-\lambda^2)]$*

$$\Delta(z_k^*) \leqslant \frac{Ld}{r}\Delta_k \leqslant \frac{Ld^2}{r\lambda(1-\lambda^2)^{1/2}} k^{-1/2}. \quad (2)$$

Многогранник G обычно задается аналитически в виде системы линейных неравенств, а множество $\overline{G}$ и отображение $T(z)$ задаются неявно, алгоритмически. Поэтому значения констант L, r (а, возможно, и d) не известны. Поэтому оценка (2) не применима для отыскания ε-решения вариационного неравенства, под которым понимается любая точка $z \in \overline{G}$, для которой $\Delta(z) \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon \geqslant 0$. По аналогии с [3] (возможно, не на каждом шаге, а, например, через 10 итераций) вместо шага 3 отыскиваем Δ_k' — максимальное значение задачи линейного программирования $\mathcal{A}_k'$ вида

$$\tau' \to \max, \quad \langle t_i, z - z_i \rangle + \tau' \leqslant 0,\ i \in I_k^1, \quad \langle a_i, z - z_i \rangle + \alpha_i \leqslant 0, \quad i \in I_k^2, \quad z \in G.$$

Пусть $\mu' = \{\mu_i';\, i \in I_k^1\}$ — компоненты оптимального плана задачи, двойственной к $\mathcal{A}_k'$, $\overline{\mu}' = \sum_{i \in i_k^1} \mu_i'$. При $I_k^1 \neq \varnothing$ вычисляется точка $z_k^{\prime *} = \sum_{i \in I_k^1} \mu_i' z_i / \overline{\mu}'$.

Теорема 2. *Пусть множество $\overline{G}$ диаметра d содержит шар радиуса $r > 0$. При $k > d^2/[r^2\lambda^2(1-\lambda^2)]$*

$$\Delta(z_k^{\prime *}) \leqslant \Delta_k' \leqslant \frac{Ld}{r}\Delta_k. \tag{3}$$

Доказательство теоремы проводится по схеме, приведенной, например, в [3].

Согласно (3), скорость сходимости Δ_k' не хуже, чем для Δ_k. Для отыскания ε-решения (при $\varepsilon > 0$) вариационного неравенства достаточно проверить выполнение условия $\Delta_k' \leqslant \varepsilon$.

Работа поддержана РФФИ, проект № 09-01-00516.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lemaréchal C., Nemirovskii A,, , Nesterov Yu.* New Variants of Bundle Methods. — Math. Progr., 1995, v. 69, p. 111–147.
2. *Гольштейн Е. Г.* Метод решения вариационных неравенств, определяемых монотонными отображениями. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2002, т. 42, № 7, с. 117–127.
3. *Бэр К., Гольштейн Е. Г., Соколов Н. А.* Об использовании метода уровней для минимизации выпуклых функций, не все значения которых конечны. — Экономика и матем. методы, 2000, т. 36, в. 4, с. 95–107.