В. А. Барвинок, В. И. Богданович, А. Н. Плотников (Самара, СГАУ). **О спектральной структуре серий в последовательной выборке стационарного процесса.**

Одним из характерных свойств закона больших чисел для случайных процессов и полей является формирование устойчиво воспроизводимых структур, элементами которых служат перестановки, циклы и серии [1]. Наиболее интересными с точки зрения как теории, так и ее приложений представляются серии, образующие спектральную структуру, состоящую из двух подструктур.

Для каждого выборочного значения непрерывной случайной величины существуют два равновозможных положения относительно медианы ($>\mid<$). Причем положения всех значений независимы в совокупности. Для каждой пары соседних точек существуют также два равновозможных отношения порядка или два знака последовательной разности. Соседние последовательные разности коррелированны с коэффициентом $\rho=-1/2$. Серии положений относительно медианы являются сериями успехов в последовательности испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p=1/2$, серии отношений порядка образуют локальные монотонные тренды. Следуя В. Феллеру [1], определим серию как рекуррентное событие и введем в рассмотрение целочисленные величины T_l — время возвращения серии длины l и $R_n^{(l)}$ — число серий длины l в последовательности длиной $n \geqslant l$. Как показано в [1], серия успехов длины l является достоверным рекуррентным событием, и при больших n справедлива асимптотическая нормальная оценка $R_n^{(l)} \sim \mathbf{N}(n/\mu_{T_l}, \sigma_{T_l}\sqrt{n/\mu_{T_l}^3})$. Вычисления числовых характеристик T_l с помощью аппарата производящих функций дают

$$\mu_{T_l}=2^{l+1}-2, \quad \sigma_{T_l}^2=2^{2(l+1)}-(2l+1)2^{l+1}-2.$$

Среднее и дисперсия нормальной асимптотики числа серий успехов длины l на основании теоремы Мизеса–Феллера составят

$$\mu_{R_n^{(l)}} \approx \frac{n}{\mu_{T_l}}, \quad \sigma_{R_n^{(l)}}^2 \approx \frac{n\sigma_{T_l}^2}{\mu_{T_l}^3},$$

и при больших l ($l>6$) справедливо асимптотическое пуассоновское приближение с параметром

$$\lambda_n^{(l)}=\mu_{R_n^{(l)}} \approx \sigma_{R_n^{(l)}}^2 \approx \frac{n}{2^{l+1}}.$$

Числовые характеристики гауссовского спектра числа серий первого типа приведены в табл. 1.

Таблица 1. Среднее значение и дисперсия числа знаковых серий в зависимости от длины серии

l	1	2	3	4	5	6	$\geqslant 7$
μ/n	0,5	0,167	0,071	0,033	0,016	0,008	$2^{-(l+1)}$
σ^2/n	0,25	0,102	0,052	0,027	0,014	0,007	$2^{-(l+1)}$

Производящую функцию времен возвращения трендовой серии найдем по аналогии с сериями успехов в последовательных испытаниях по схеме Бернулли. Пусть $u_n^{(l)}$ — вероятность образования на шаге с номером n очередной восходящей серии длины l. В пространстве последовательных разностей образуется рекуррентная серия «успехов» с параметрами $n'=n-1$, $l'=l-1$. Как было показано в [2], вероятности серий в пространстве последовательных разностей инвариантны по отношению к закону распределения совокупности и определяются при помощи собственных функций

$\varphi_n^l(x)$, имеющих вид степенных многочленов: $u_n^{(l)} = \int_0^1 \varphi_n^{(l)}(x)\,dx$. Для последних справедливы рекуррентные соотношения, аналогичные знаковым сериям. Отличие заключается в том, что порядок рекуррентного соотношения на единицу меньше, а умножению на вероятность p «успеха» соответствует операция $\int_0^x \cdot\, dt$.

Воспользуемся методом производящих функций. Рекуррентная производящая функция времени возвращения T_l будет иметь вид

$$U_l(s) = 1 + \frac{1}{s(1-s)} \int_0^s \psi_l(x)\,dx,$$

где $\psi_l(x)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d^{l-2}\psi_l(x)}{dx^{l-2}} + \frac{d^{l-2}\psi_l(x)}{dx^{l-3}} + \dots + \frac{d\psi_l(x)}{dx} + \psi_l(x) = x, \qquad \left.\frac{d^k\psi_l(x)}{dx^k}\right|_{x=0} = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, l-3.$$

Среднее и дисперсия времени возвращения трендовой серии составят

$$\mu_{T_l} = \left[\int_0^1 \psi_l(x)\,dx\right]^{-1}, \quad \sigma_{T_l}^2 = 3\mu_{T_l} + [1 - 2\psi_l(1)]\mu_{T_l}^2.$$

При использовании теоремы Мизеса–Феллера следует учесть, что длина цепи последовательных разностей на 1 короче длины исходной выборки. Поэтому числовые характеристики числа серий будут равны

$$\mu_{R_n^{(l)}} \approx \frac{n-1}{\mu_{T_l}}, \quad \sigma^2_{R_n^{(l)}} \approx \frac{(n-1)\sigma_{T_l}^2}{(1+\mu_{T_l})^3},$$

а параметр пуассоновской асимптотики при больших n составит

$$\lambda_n^{(l)} = \mu_{R_n^{(l)}} \approx \sigma^2_{R_n^{(l)}} \approx \frac{l(n-1)}{(l+1)!}.$$

Числовые характеристики гауссовского спектра числа трендовых серий приведены в табл. 2.

Таблица 2. Среднее значение и дисперсия числа трендовых серий в зависимости от длины серии

l	2	3	4	5	$\geqslant 6$
$\mu/(n-1)$	0,5	0,132	0,034	$6,9 \cdot 10^{-3}$	$l/(l+1)!$
$\sigma^2/(n-1)$	0,074	0,060	0,026	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$l/(l+1)!$

Как видно из представленных результатов, число, а, точнее, поток серий имеет отчетливую спектральную структуру. Количество различимых спектральных полос и их контрастность возрастают пропорционально $n^{1/2}$. Такое свойство структуры серий позволяет установить надежный критерий случайности — отсутствие инверсий среди спектральных линий контрастных полос. Или, другими словами, наличие хотя бы одной инверсии в спектре числа серий можно обоснованно интерпретировать как искусственное упорядочение последовательной выборки. Наряду с выше указанным статистическим приложением, установленные закономерности, по-видимому, должны проявляться в процессах диффузии, размножения и эволюции биологических видов и тому подобных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984.
2. *Плотников А. Н.* Закон распределения длины максимальной серии и его статистические приложения. — Изв. СамНЦ РАН, 2006, т. 8, № 4, с. 1047–1056.