А. С. Калитвин, В. А. Калитвин (Липецк, ЛГПУ). **О математическом моделировании уравнениями Романовского некоторых задач марковских цепей.**

Пусть даны непрерывная случайная переменная X со значениями на спрямляемой кривой $\mathcal{L}$ на плоскости или в трехмерном пространстве и бесконечный ряд опытов с этой переменной, пронумерованных числами $1, 2, 3, \ldots$. Опыты 1 и 2 образуют начальное звено № 0, опыты 2 и 3 образуют звено № 1 и т. д. Предполагается, что при естественной параметризации кривой длина ее произвольной дуги $(G, G+\Delta G)$ обозначается dG, а параметр изменяется на конечном отрезке. Пусть $p_0(A,B)\,dA\,dB$ — вероятность того, что X попадает в первом опыте на дугу $(A, A+\Delta A)$, а во втором опыте — на дугу $(B, B+\Delta B)$, $p_k(A,B)$ — дифференциальный закон вероятностей того, что значения A и B переменной X попадут в звено № k, при условии, что результаты других опытов неизвестны, $p_k(A)$ — дифференциальный закон того, что $X = A$ в k-м опыте, при условии, что результаты других опытов неизвестны. Если $p_0(A,B)$, $p_k(A,B)$ и $p_k(A)$ — непрерывные функции, то будем говорить, что рассмотренные звенья образуют непрерывную двухсвязную цепь Маркова. Функции $p_k(A,B)$ и $p_k(A)$ удовлетворяют равенствам $\int_{\mathcal{L}}\int_{\mathcal{L}} p_k(A,B)\,dA\,dB = 1$, $\int_{\mathcal{L}} p_k(A)\,dA = 1$. В силу теоремы сложения вероятностей

$$p_k(A,B)=\int_{\mathcal{L}} p_{k-1}(U,A)\varphi(U,A,B)\,dU, \quad p_k(A)=\int_{\mathcal{L}}\int_{\mathcal{L}} p_{k-3}(V,U)\varphi(A,V,U)\,dU\,dV, \tag{1}$$

где непрерывная на $\mathcal{L}\times\mathcal{L}\times\mathcal{L}$ функция $\varphi(U,A,B)$ — дифференциальный закон вероятностей того, что $X = B$ в каком-нибудь опыте и известно, что в двух предшествующих опытах $X = U$ и $X = A$. Полагая $p_k(A,B) = \lambda^k x(A,B)$, где λ — произвольная постоянная, получаем интегральное уравнение

$$\lambda x(A,B) = \int_{\mathcal{L}} \varphi(U,A,B)x(U,A)\,dU \equiv \Phi x(A,B). \tag{2}$$

Таким образом, задача марковских цепей, выраженная уравнениями (1), сводится к однородному интегральному уравнению (2), которое рассматривается вместе с неоднородным уравнением Романовского

$$\lambda x(A,B) = \Phi x(A,B) + f(A,B). \tag{3}$$

Аналогично, уравнения (1) и (2) являются математическими моделями двухсвязных цепей Маркова, в которых вместо спрямляемой кривой $\mathcal{L}$ рассматривается квадрируемая или кубируемая область $\mathcal{L}$. Во всех случаях свойства изучаемых двухсвязных цепей Маркова определяются свойствами решений уравнений (2) и (3).

Заметим, что уравнения (2) и (3) изучались В. И. Романовским в случае совпадения $\mathcal{L}$ с отрезком $[a,b]$ числовой оси и в предположении непрерывности заданных функций φ и f, а ряд опытов, связанных в цепь Маркова, играет важную роль в генетике, в некоторых вопросах математической физики и т. д. [1]. Интегральные уравнения типа Романовского изучались в [2].

Остановимся на некоторых свойствах уравнения (3). Обозначим $\mathcal{C}$ пространство непрерывных на $\mathcal{L}\times\mathcal{L}$ функций, $C(L^1)$ — пространство непрерывных на $\mathcal{L}\times\mathcal{L}$ вектор-функций со значениями в L^1. Непрерывная на $\mathcal{L}\times\mathcal{L}\times\mathcal{L}$ функция $\varphi \in C(L^1)$, однако оператор Φ не является компактным в C. Поэтому интегральное уравнение (3) существенно отличается от интегральных уравнений Фредгольма с непрерывным ядром, основу теории которых составляют теоремы Фредгольма [3].

С применением методов, развитых в [2], доказывается, что при $\varphi \in C(L^1)$ оператор Φ^2 компактен в C. Так как Φ^2 — компактный оператор в C, то при $\lambda \neq 0$ оператор $\lambda I - \Phi$ фредгольмов в C [3]. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Если $\varphi \in C(L^1)$, $\lambda \neq 0$ и $f \in C$, то для уравнения* (3) *имеют место теоремы Фредгольма.*

В условии теоремы уравнение (3) можно записать в виде $x = (1/\lambda)\Phi x + (1/\lambda)f$. Подставляя в правую часть этого уравнения вместо x выражение $(1/\lambda)\Phi x + (1/\lambda)f$, получим уравнение

$$\lambda^2 x = \Phi^2 x + \Phi f + \lambda f, \tag{4}$$

которое является обычным интегральным уравнением Фредгольма с компактным оператором Φ^2. Поэтому для уравнения (4) справедливы теоремы Фредгольма.

Решения уравнения (3) являются решениями уравнения (4), а решение уравнения (4) может не быть решением уравнения (3) [2]. Следовательно, для решения уравнения (3) достаточно найти решения уравнения (4) и проверить, что найденные решения удовлетворяют уравнению (3). Таким образом, для исследования решений интегральных уравнений Романовского (3), моделирующих задачи двухсвязных цепей Маркова, могут быть использованы интегральные уравнения Фредгольма (4) с компактным интегральным оператором Φ^2, теория и методы решения которых развиты достаточно полно.

В заключение отметим, что вид интегрального оператора Φ^2 определяется с применением теоремы Фубини.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Романовский В. И.* Избранные труды. Т. 2. Теория вероятностей, статистика и анализ. Ташкент: Наука, 1964, 390 с.
2. *Калитвин А. С.* Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2007, 195 с.
3. *Канторович Л.В.*, *Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984, 752 с.