А. С. А н д р е е в, О. Г. Д м и т р и е в а (Ульяновск, УлГУ). **Метод векторных функций Ляпунова в задачах управления.**

Пусть движение управляемой системы описывается уравнениями

$$\dot{x} = X(t, x, u), \quad X(t, 0, 0) \equiv 0, \tag{1}$$

где $t \in \mathbf{R}^+$, $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, X: $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ есть вектор-функция, непрерывная по своим аргументам, и такая, что для некоторого класса U непрерывных управлений u: $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $u(t, 0) \equiv 0$, система (1) удовлетворяет условиям существования и единственности решений.

По отношению к невозмущенному движению $x(t, 0) \equiv 0$ системы (1) могут быть рассмотрены задачи: о его стабилизации, о синтезе управления, приводящего каждое возмущенное движение из некоторой области $\{x \in \mathbf{R}^n\colon \|x\| < H,\ 0 < H \leqslant +\propto\}$ к движению $x = 0$ за конечный промежуток времени. В докладе представлены новые результаты по развитию метода векторных функций Ляпунова в этих задачах. В частности, доказаны следующие теоремы, развивающие результаты работ [1, 2].

Теорема 1. *Предположим, что существует такая вектор-функция Ляпунова* $V = V(t, x)$, *что* $\overline{V}(t, x) = \max\{V^1(t, x), V^2(t, x), \ldots, V^k(t, x)\}$ *есть определенно-положительная, и выполнены условия*:

1) $\dot{V}(t, x) = F(t, V(t, x)) + W(t, x, V(t, x))$, $F(t, 0) \equiv 0$, $W(t, 0, 0) \equiv 0$;

2) *нулевое решение* $v = 0$ *системы сравнения* $\dot{v} = F(t, v)$, $F(t, 0) \equiv 0$ *равномерно устойчиво* (F: $\mathbf{R}^+ \times \Omega \to \mathbf{R}^k$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, *есть непрерывная квазимонотонно возрастающая функция*);

3) *для любой предельной совокупности* (X^*, V^*, F^*, W^*) *и каждого ограниченного решения* $v = v^*(t) \neq 0$ *предельной системы сравнения* $\dot{v} = F^*(t, v)$ *множество* $\{V^*(t, x) = v^*(t)\} \cap \{W^*(t, x, v^*(t)) = 0\}$ *не содержит решений предельной к* (1) *системы* $\dot{x} = X^*(t, x)$.

Тогда управляющее воздействие $u = u(t, x)$ *решает задачу о стабилизации системы* (1).

Теорема 2. *Предположим, что для системы* (1) *можно найти такие управление* $u^0 \in U$ *и векторную функцию* $V(t, x)$, *что*:

1) $a_1(\|x\|) \leqslant \overline{V}(t, x) \leqslant a_2(\|x\|)$, $(t, x) \in \mathbf{R}^+ \times G$;

2) $\dot{V}^+(t, x) \leqslant F(t, V(t, x))$, $(t, x) \in \mathbf{R}^+ \times G$;

3) *решения системы сравнения* $\dot{v} = F(t, v)$, $F(t, 0) \equiv 0$, *где* F: $\mathbf{R}^+ \times \Omega \to \mathbf{R}^k$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, *есть непрерывная квазимонотонно возрастающая функция, из некоторой* Δ-*окрестности* $v = 0$ *при* $\Delta > 0$ *совпадают с* $v = 0$ *через конечное* $T > 0$ *равномерно по* $t_0 \in \mathbf{R}^+$.

Тогда $u = u^0(t, x)$ *решает задачу о равномерном конечном синтезе.*

Теорема 3. *Допустим, что для системы* (1) *можно найти такие управление* $u^0 \in U$ *и векторную функцию* $V(t, x) \geqslant 0$, $\|V(t, x)\| \leqslant a(\|x\|)$, *что*:

1) $\dot{V}^+(t, x) \leqslant F(t, V(t, x))$, $(t, x) \in \mathbf{R}^+ \times G$;

2) *решения системы сравнения* $\dot{v} = F(t, v)$, $F(t, 0) \equiv 0$ (F: $\mathbf{R}^+ \times \Omega \to \mathbf{R}^k$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, *есть непрерывная квазимонотонно возрастающая функция*), *из некоторой* Δ-*окрестности* $v = 0$ *при* $\Delta > 0$ *совпадают с* $v = 0$ *через конечное* $T > 0$ *равномерно по* $t_0 \in \mathbf{R}^+$;

3) *движения системы* $\dot{x} = X^0(t, x)$, $X^0(t, x) = X(t, x, u^0(t, x))$, *начинающиеся на множестве* $\{V(t, x) = 0\}$, *попадают в точку* $x = 0$ *через конечное* $T > 0$ *равномерно по* $t_0 \in \mathbf{R}^+$.

Тогда $u = u^0(t, x)$ *решает задачу о равномерном конечном синтезе.*

Показано применение этих теорем в задачах о стабилизации и управлении программным движением механической системы с голономными связями.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2.1.1/6194) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013гг» (НК-408П, П/2230).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А. С.*, *Перегудова О. А.* К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости. — ДАН, 2005, т. 400, № 5, с. 621–624.
2. *Коробов В. И.* Метод функции управляемости. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007, 576 с.