М. В. Ф а л а л е е в, **С. С. О р л о в** (Иркутск, ИГУ). **Начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости.**

Рассматриваются уравнения вида

$$(\gamma-\Delta)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,\mathbf{x})+\Delta^2 u(t,\mathbf{x})-\int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(\tau,\mathbf{x})\,d\tau=f(t,\mathbf{x}), \tag{1}$$

$$(\gamma-\Delta)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,\mathbf{x})-\beta\Delta\frac{\partial}{\partial t}u_t(t,\mathbf{x})-\Delta u(t,\mathbf{x})+\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau,\mathbf{x})\,d\tau=f(t,\mathbf{x}), \tag{2}$$

$t\geqslant 0$, $\mathbf{x}\in\Omega$, где $\Omega\subset\mathbf{R}^m$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $\mathcal{C}^\infty$, вещественные постоянные γ,β отличны от нуля, ядро $g(t)$: $\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ — аналитическая функция, $f(t,\mathbf{x})$ — заданная функция класса $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $k\in\{0\}\cup\mathbf{N}$, при каждом $t\geqslant 0$. Такие уравнения встречаются при изучении вязкоупругих процессов, в частности, в случае $m=2$ и $f(t,x_1,x_2)\equiv 0$ первое из них описывает колебания вязкоупругой пластины с памятью, второе моделирует вязкоупруго-динамическое состояние среды [1].

Поставим для каждого из уравнений (1) и (2) задачу Коши–Дирихле, т.е. зададим начальные условия

$$u(t,\mathbf{x})|_{t=0}=u_0(\mathbf{x}),\quad \frac{\partial}{\partial t}u(t,\mathbf{x})\Big|_{t=0}=u_1(\mathbf{x}),\qquad \mathbf{x}\in\Omega, \tag{3}$$

и однородное граничное условие

$$u(t,\mathbf{x})|_{\mathbf{x}\in\partial\Omega}=0,\qquad (t,\mathbf{x})\in\mathbf{R}_+\times\partial\Omega. \tag{4}$$

Здесь $u_0(\mathbf{x}),u_1(\mathbf{x})$ — функции, имеющие на множестве Ω порядок гладкости $k+4$ для уравнения (1), $k+2$ для уравнения (2), $k\in\{0\}\cup\mathbf{N}$, удовлетворяют граничному условию (4).

Далее предполагаем γ таким, что однородная задача Дирихле

$$\Delta\phi(\mathbf{x})=\gamma\phi(\mathbf{x}),\quad \phi(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}\in\partial\Omega}=0$$

имеет ненулевые решения. В работе, представленной данным докладом, получены условия однозначной разрешимости начально-краевых задач (1), (3), (4) и (2)–(4) в классах функций, определенных на цилиндре $(t,\mathbf{x})\in\mathbf{R}_+\times\Omega$, непрерывно дифференцируемых на нем дважды по t и не менее четырех раз для уравнения (1) и двух раз для уравнения (2) по совокупности пространственных переменных. Исследование проведено методами теории фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов [2, 3], развиваемой авторами. В качестве объектов исследования выступают не сами начально-краевые задачи, а их абстрактные аналоги — операторные интегро-дифференциальные уравнения

$$B\ddot{x}(t)-Ax(t)-\int_0^t h(t-s)Ax(s)\,ds=f(t), \tag{5}$$

$$B\ddot{x}(t)-A_1\dot{x}(t)-A_0x(t)-\int_0^t k(t-s)x(s)\,ds=f(t), \tag{6}$$

с начальными условиями

$$x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=x_1. \tag{7}$$

Здесь B,A,A_1,A_0 — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, ядро $k(t)$ — однопараметрическое семейство класса $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+)$ операторов с аналогичными свойствами и областью определения $D(k)$, не зависящей от t. Для уравнения (5) предполагается, что

$D(B) \subset D(A)$, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, а для уравнения (6): $D(B) \subset D(A_1) \cap D(A_0) \cap D(k)$, $\overline{D(B)} = \overline{D(A_1) \cap D(A_0) \cap D(k)} = E_1$, $h(t)$: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ — аналитическая функция, оператор-функция $k(t)$ сильно непрерывна на $D(k)$, а оператор B фредгольмов, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n < +\infty$.

Если

$$E_1 \equiv \{v(\mathbf{x})\colon\ v(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}_2(\Omega),\ v(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0\},\ E_2 \equiv \mathcal{L}_2(\Omega),$$

$$B = \gamma - \Delta,\ A = -\Delta^2,\ h(t) = -g(t),\ A_1 = \beta\Delta,\ A_0 = \Delta,\ k(t) = -g(t)\Delta,$$

$$D(B) = D(A) \equiv \{v(\mathbf{x})\colon\ v(\mathbf{x}) \in H^{k+4}(\Omega),\ v(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0\},$$

$$D(B) = D(A_1) = D(A_0) = D(k) \equiv \{v(\mathbf{x})\colon\ v(\mathbf{x}) \in H^{k+2}(\Omega),\ v(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0\},$$

то начально-краевые задачи (1), (3), (4) и (2)–(4) редуцируются к задачам Коши (5), (7) и (6), (7) соответственно. Линейный оператор B при этом является фредгольмовым. Обозначим $\{\phi_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^n$ базис его нуль-пространства.

Исследование однозначной разрешимости задач (5), (7) и (6), (7) проводится с помощью аппарата распределений Соболева–Шварца в банаховых пространствах [2]. В обобщенной постановке задачи Коши (5), (7) и (6), (7) имеют вид сверточных уравнений

$$(B\delta''(t) - A(\delta(t) + h(t)\theta(t))) * \widetilde{x}(t) = f(t)\theta(t) + Bx_1\delta(t) + Bx_0\delta'(t),$$

$$(B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t) - k(t)\theta(t)) * \widetilde{x}(t) = f(t)\theta(t) + (Bx_1 - A_1x_0)\delta(t) + Bx_0\delta'(t),$$

единственные решения которых в классе $K'(\mathbf{R}_+, E_1)$-распределений с ограниченным слева носителем задаются формулами

$$\widetilde{x}(t) = \mathcal{E}_1(t) * (f(t)\theta(t) + Bx_1\delta(t) + Bx_0\delta'(t)), \tag{8}$$

$$\widetilde{x}(t) = \mathcal{E}_2(t) * (f(t)\theta(t) + (Bx_1 - A_1x_0)\delta(t) + Bx_0\delta'(t)). \tag{9}$$

Обобщенные оператор-функции $\mathcal{E}_1(t)$ и $\mathcal{E}_2(t)$ называются *фундаментальными оператор-функциями* вырожденных интегро-дифференциальных операторов $(B\delta''(t) - A(\delta(t) + h(t)\theta(t)))$ и $(B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t) - k(t)\theta(t))$ соответственно и построены в терминах жордановой структуры оператора B.

Теорема 1. *Если оператор B имеет полный A-жорданов набор* [4], *то вырожденный интегро-дифференциальный оператор $(B\delta^{(N)}(t) - A(\delta(t) + h(t)\theta(t)))$ имеет на классе $K'(\mathbf{R}_+, E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}(t) = \Gamma \sum_{k=1}^{+\infty} (\delta(t) + h(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)(A\Gamma)^{k-1}(I - \widetilde{Q})$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p_i-1} \left(\sum_{j=0}^{p_i-k} \left\langle \cdot, \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right) \delta^{(kN)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^{k+1} \right),$$

где Γ — оператор Треногина–Шмидта, $\{\varphi_i^{(j)},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, p_i\}$ — полный A-жорданов набор оператора B [4], *$\{\psi_i^{(j)},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, p_i\}$ — полный A^*-жорданов набор оператора B^*, $\widetilde{Q} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}$, $r(t)$ — резольвента ядра $(-g(t))$.*

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что теорема 1 сформулирована для интегро-дифференциального оператора более общего вида, чем в уравнении (5). Требуемый для приложения частный случай имеет место при $N = 2$.

Теорема 2. *Если фредгольмов оператор B имеет относительно оператор-функции $F(t) = A_1 + A_0 t + \int_0^t (t-s)k(s)\,ds$ полный жорданов набор [4], то вырожденный интегро-дифференциальный оператор $(B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t) - k(t)\theta(t))$ имеет на классе $\mathcal{K}'(\mathbf{R}_+, E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_2(t) = \Gamma t\theta(t) * (I\delta(t) + R(t)\theta(t)) * (I\delta(t) + N(t)\theta(t)) * \left((I-Q)\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle \bullet, \psi_i^{(j)}\right\rangle z_i \delta^{(p_i+1-j)}(t)\right),$$

где $R(t)$ — резольвента ядра $F(t)\Gamma$, $N(t)$ — резольвента ядра $(-\sum_{i=1}^{n} Q_i R^{(p_i)}(t)\theta(t))$, $Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n}\langle\bullet, \psi_i\rangle z_i$ — проектор в E_2, $\{z_i,\ i = 1,2,\ldots,n\}$ — система элементов, биортогональная базису $N(B^*)$, $\{\psi_i^{(j)},\ i = 1,2,\ldots,n,\ j = 1,2,\ldots,p_i\}$ — полный обобщенный жорданов набор оператора B^* относительно оператор-функции $F^*(t)$.

Наиболее простой вид $\mathcal{E}_1(t)$ и $\mathcal{E}_2(t)$ имеют, когда $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$ (длины всех жордановых цепочек равны 1). Именно с таким частным случаем мы имеем дело при исследовании уравнений (1) и (2). Восстанавливаемые по формулам (8) и (9) обобщенные решения задач Коши (5), (7) и (6), (7) (а значит, и начально-краевых задач (1), (3), (4) и (2)–(4)) представляют собой регулярные обобщенные функции, которые окажутся классическими решениями, если удовлетворят начальным условиям. Отсюда и вытекают соотношения на правые части уравнений (1) и (2) и начальные функции (3), гарантирующие однозначную разрешимость исходных задач. А именно, справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. *Если γ является собственным числом кратности n оператора Лапласа, функции $\int_\Omega f(t,\mathbf{x})\phi_i(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+)$, $i = 1,2,\ldots,n$, и выполняются условия*

$$\int_\Omega \Big(f(0,\mathbf{x}) - \gamma^2 u_0(\mathbf{x})\Big)\phi_i(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0, \quad \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial t}(0,\mathbf{x}) - \gamma^2 u_1(\mathbf{x}) + g(0)\gamma^2 u_0(\mathbf{x})\right)\phi_i(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0,$$

то задача Коши–Дирихле (1), (3), (4) имеет единственное решение класса $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+, E_1)$.

Теорема 4. *Если γ является собственным числом кратности n оператора Лапласа, функции $\int_\Omega f(t,\mathbf{x})\phi_i(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+)$, $i = 1,2,\ldots,n$, и выполняются условия*

$$\int_\Omega \Big(f(0,\mathbf{x}) + \gamma\beta u_1(\mathbf{x}) + \gamma u_0(\mathbf{x})\Big)\phi_i(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0,$$

то задача Коши–Дирихле (2)–(4) имеет единственное решение класса $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+, E_1)$.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 3 была доказана другим способом в работе [5]. Теорема 1 допускает обобщение на случаи нетерова оператора B, а также спектральной, секториальной и радиальной ограниченности операторного пучка $(\lambda B - A)$ [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013г.г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cavalcanti M. M.*, *Domingos V. N.*, *Ferreira J.* Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping. — Math. Meth. Appl. Sci., 2001, v. 24, p. 1043–1053.
2. *Sidorov N.*, *Loginov B.*, *Sinitsyn A.*, *Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.
3. *Фалалеев М. В.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах. — Сибирский. матем. журн., 2000, т. 41, № 5, с. 1167–1182.

4. *Вайнберг М. М.*, *Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
5. *Орлов С. С.* Вырожденное интегро-дифференциальное уравнение в банаховых пространствах и его приложение. — Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, 2010, т. 3, № 1, с. 142–148.
6. *Sviridyuk G. A.*, *Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston, Köln; Tokyo: VSP, 2003.