А. С. Иванов, **Л. И. Миронова**, **О. И. Челяпина** (Подольск, РОНЦ МГОУ). **Математические аналогии для определения внутренних напряжений в плоской задаче термоупругости.**

Прочностная надежность элементов конструкций новой техники определяется уровнем и характером распределения внутренних напряжений. В общем случае появление внутренних напряжений связано с неоднородной деформацией внутри твердого тела как реакция системы на возможные внутренние и внешние воздействия. Частными случаями внутренних напряжений являются температурные, концентрационные, остаточные, в окрестности структурных неоднородностей, которые следует рассматривать как дополнительные к основному (классическому) напряженному состоянию. Первые из них обусловлены неравномерным распределением температуры в элементах конструкций. Одной из причин появления неоднородной температурной деформации является объемное тепловыделение за счет ядерных реакций [1]. Это свойственно элементам конструкций ядерных энергетических установок различного функционального назначения.

При наличии дополнительных деформаций уравнения теории упругости для случая изотропного тела записываются в виде [2]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha T + \varepsilon^0_{xx}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{\mu}\tau_{xy} + \gamma^0_{xy},$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] + \alpha T + \varepsilon^0_{yy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{\mu}\tau_{yz} + \gamma^0_{yz},$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha T + \varepsilon^0_{zz}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{\mu}\tau_{xz} + \gamma^0_{xz},$$

где $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ — компоненты тензора деформаций, $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ — компоненты тензора напряжений в теории упругости, E — модуль Юнга, $\mu = E/[2(1+\nu)]$ есть модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $\varepsilon^0_{xx}, \varepsilon^0_{yy}, \varepsilon^0_{zz}, \gamma^0_{xy}, \gamma^0_{yz}, \gamma^0_{xz}$ — дополнительные деформации, обусловленные структурными, фазовыми и другими превращениями, α — коэффициент линейного расширения, T — температура. Если использовать тензорную форму записи, то в общем виде напряжения выражаются следующим образом:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + 3\delta_{ij}\lambda\varepsilon - \delta_{ij}\frac{E}{1-2\nu}\alpha T - \sigma^0_{ij}, \tag{1}$$

где λ — параметр Ламе, определяемый из выражения $\lambda = \nu E(1+\nu)^{-1}(1-2\nu)^{-1}$, δ_{ij} — символ Кронекера. В соотношении (1) величина $\sigma^0_{ij} = 2\mu\varepsilon^0_{ij} + 3\delta_{ij}\lambda\varepsilon^0$ представляет собой внутреннее напряжение вследствие возникновения в теле дополнительных деформаций.

Внутренние напряжения в твердом теле имеют различную физическую природу. Однако с позиции математического формализма их описание может быть сведено к единым соотношениям с точностью до перенормировки постоянных. В качестве иллюстрации рассмотрим первый инвариант тензора внутренних напряжений в цилиндрической оболочке (например, в оболочке тепловыделяющего элемента). Для стационарного температурного поля имеем [3]

$$\sigma_{ll} = \frac{2\alpha\mu(T_1 - T_2)(1+\nu)}{(1-\nu)\ln(R/r_0)}\left\{1 + 2\ln\frac{r}{R} + \frac{2(r_0/R)^2}{1-(r_0/R)^2}\ln\frac{r_0}{R}\right\}, \tag{2}$$

где α — коэффициент линейного расширения, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $(T_1 - T_2)$ — температурный период по толщине цилиндрической оболочки, r_0 и R — внутренний и внешний радиусы оболочки. Аналогичную координатную зависимость имеет первый инвариант тензора концентрационных напряжений. При этом выражение перед фигурными скобками принимает другой вид вследствие иной природы внутренних напряжений:

$$\sigma_{ll} = \frac{2\beta\mu(C_1 - C_2)(1+\nu)}{(1-\nu)\ln(R/r_0)}\left\{1 + 2\ln\frac{r}{R} + \frac{2(r_0/R)^2}{1-(r_0/R)^2}\ln\frac{r_0}{R}\right\}, \tag{3}$$

где β — линейный коэффициент концентрационного расширения, $(C_1 - C_2)$ — перепад концентрации атомов примеси по толщине оболочки. Остальные обозначения соответствуют принятым ранее. При проведении некоторых операций полый цилиндр оказывается в напряженном состоянии при отсутствии внешних нагрузок. Одна из таких операций включает в себя удаление из полого цилиндра сектора с углом раствора ω и последующее соединение берегов разреза. Первый инвариант тензора внутренних напряжений при такой операции также имеет идентичную координатную зависимость

$$\sigma_{ll} = \frac{\mu\omega(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)}\left\{1 + 2\ln\frac{r}{R} + \frac{2(r_0/R)^2}{1-(r_0/R)^2}\ln\frac{r_0}{R}\right\}, \tag{4}$$

где ω — угол раствора при удалении сектора из полого цилиндра. Анализ соотношений (2), (3) и (4) показывает, что весьма часто внутренние напряжения различной физической природы имеют единое математическое описание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов А. С.* Математические аналогии в термомеханике. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 5, с. 848–849.
2. *Биргер И. А.* Остаточные напряжения. М.: Машгиз, 1963, 232 с.
3. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. Киев: Наукова Думка, 1970, 180 с.