С. А. З а г р е б и н а (Челябинск, ЮУрГУ). **Начально-конечные задачи для уравнений соболевского типа как обобщения задачи Шоуолтера–Сидорова.**

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, L, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M является (L,σ)-ограниченным [1].

Лемма. *Пусть оператор M является (L,σ)-ограниченным. Тогда операторы $P = (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma R^L_\mu(M)\,d\mu$, $Q = (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma L^L_\mu(M)\,d\mu$ суть проекторы, $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$. Здесь $\Gamma \in \mathbf{C}$ есть замкнутый контур, ограничивающий область, содержащую $\sigma^L(M)$; $R^L_\mu = (\mu L - M)^{-1}L$ — правая, а $L^L_\mu = L(\mu L - M)^{-1}$ — левая L-резольвенты оператора M.*

Пусть L-спектр оператора M допускает представление $\sigma^L(M) = \sigma^L_1(M) \cup \sigma^L_2(M)$, $\sigma^L_1(M) \cap \sigma^L_2(M) = \varnothing$, причем существует контур $\gamma \subset \mathbf{C} \setminus \sigma^L(M)$, ограничивающий область $\Omega \subset \mathbf{C}$, содержащую $\sigma^L_1(M)$, $\Omega \cap \sigma^L_2(M) = \varnothing$. По схеме, предложенной в [2], построим проектор $P_1 = (2\pi i)^{-1}\int_\gamma R^L_\mu(M)\,d\mu$ и положим $P_2 = P - P_1$. Для уравнения

$$L\dot{u} = Mu \tag{1}$$

соболевского типа поставим следующую задачу:

$$P_2(u(0) - u_0) = 0, \quad P_1(u(\tau) - u_\tau) = 0, \tag{2}$$

где $\tau \in \mathbf{R}_+$ (для определенности; вообще, можно считать $\tau \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$), u_0, $u_\tau \in \mathfrak{U}$. Задачу (2) назовем *начально-конечной* для уравнения соболевского типа (1). Заметим сразу, что если $\sigma^L_1(M) = \varnothing$, то задача (2) превращается в задачу Шоуолтера–Сидорова $P(u(0) - u_0) = 0$. Таким образом, начально-конечная задача является естественным ее обобщением.

Задача (2) в более частной, чем здесь, постановке впервые появилась в работах автора, например [3], где она названа «задачей Веригина». Причиной названия послужило довольно большое число публикаций (см. библиографию в [3]), где рассмотрена задача (2), но проекторы P_1 и P_2 являются спектральными проекторами оператора L. Необходимо отметить, что задачи, рассмотренные в [3] и здесь, имеют мало общего с задачей, поставленной Н. Н. Веригиным [4].

Теорема. *Пусть оператор M является (L,p)-ограниченным, $p \in \{0\} \cup \mathbf{N}$. Тогда для любых $\tau \in \mathbf{R}_+$; u_0, $u_\tau \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение задачи* (1), (2).

В [5] эта теорема была проиллюстрирована начально-конечной задачей для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной, заданного в области с однородными условиями Дирихле на границе. В последующих работах теорема была обобщена на случай сильно (L,p)-секториальных [2] и сильно (L,p)-радиальных операторов [6]. При этом в качестве приложений рассматривались неклассические уравнения математической физики, заданные не только на ограниченных областях пространства $\mathbf{R}^n$, но и на таких множествах иной геометрической структуры, как графы [7]. В настоящее время уже есть результаты о начально-конечных задачах для уравнений соболевского типа высокого порядка [8] и ведутся исследования оптимального управления решениями таких задач.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность Г. А. Свиридюку за постановку задачи и интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sviridyuk G. A.*, *Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht etc.: VSP, 2003.
2. *Загребина С. А.* Задача Шоуолтера–Сидорова–Веригина для линейных уравнений соболевского типа. — В сб.: Неклассические уравнения математической физики. Труды международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа. Новосибирск, 2007, с. 150–157.
3. *Загребина С. А.*, *Соловьева Н. П.* Начально-конечная задача для линейных эволюционных уравнений соболевского типа на графе. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 2, с. 329–330.
4. *Свиридюк Г. А.*, *Загребина С. А.* Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно p-секториальными операторами. — Дифф. уравнения, 2002, т. 38, № 12, с. 1646–1652.
5. *Веригин Н.Н.* Об одном классе гидромеханических задач для областей с подвижными границами. — Динамика жидкости со свободной границей. Новосибирск, 1980, в. 46, с. 23–32.
6. *Загребина С. А.* О задаче Шоуолтера–Сидорова. — Изв. ВУЗов. Сер. матем. 2007, № 3, с. 22–28.
7. *Загребина С.А.*, *Сагадеева М.А.* Обобщенная задача Шоуолтера–Сидорова для уравнений соболевского типа с сильно (L, p)-радиальным оператором. — Вестник МаГУ. Сер. матем. Магнитогорск, 2006, в. 9, с. 17–27.
8. *Замышляева А. А.* Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска–Лява на графе. — Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. матем. Иркутск, 2010, т. 3, № 2, с. 85–95.