И. И. Голичев (Уфа, ИМВЦ УНЦ РАН). **Решение уравнений Новье–Стокса как обратной задачи.**

Начально-краевую задачу для уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости

$$L_u \equiv u_t - v\Delta u + u_i u_{x_i} = f(x,t) - \operatorname{grad} p, \qquad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_S = \varphi, \quad u(x,0) = h, \qquad x \in G, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad (x,t) \in Q, \tag{3}$$

где G — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $Q = G \times (0,T]$, $S = \partial G \times (0,T]$, ∂G — граница области G, можно рассматривать как обратную задачу для системы параболических уравнений (1), в которой одно слагаемое в правой части ($\operatorname{grad} p$) не задано, зато имеются дополнительные данные (3) на решении задачи (1), (2).

Далее приведем несколько способов решения задачи (1)–(3) как обратной задачи. Основным способом решения обратных задач является сведение их к задачам оптимального управления. В данном случае имеется несколько вариантов таких задач.

Вариант 1.

$$J_1(v) = \int_Q |\operatorname{div} u(v)|^2 \, dx\, dt \to \inf, \qquad v \in U_1, \tag{4}$$

где $u(v)$ — решение задачи (1), (2) при $p = v \in U_1 = \{w \in W_2^{1.0}(Q), \int_G v(x,t)\, dx = 0\}$.

Вариант 2.

$$J_2(v) = \int_Q |\operatorname{div} u(v)|^2 \, dx\, dt \to \inf, \qquad v \in U_2, \tag{5}$$

где $u(v)$ — решение уравнения $Lu = f - v$ с начальными и краевыми условиями (2), $U_2 = H_\perp$, $H^\perp$ — градиентная составляющая в ортогональном разложении $L_2(Q) = H \oplus H^\perp$.

Для решения задачи (1), (2), (4) и (1), (2), (5) можно использовать метод проекции градиента

$$v_{k+1} = P_{U_i}(v_k - \alpha_k J_i'(v_k)), \qquad i = 1, 2, \tag{6}$$

где P_{U_i} — оператор проектирования на множество U_i.

Градиенты функционалов $J_i(v)$, $i = 1, 2$, определяются по формулам

$$J_1'(v) = -\operatorname{div} \psi(v), \quad J_2' = \psi(v), \tag{7}$$

где $\psi = \psi(v)$ — решение сопряженной задачи

$$L^*(\psi) = -\psi_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i(v)\psi) + \frac{\partial u_i(v)}{\partial x_i}\psi = \operatorname{grag} \operatorname{div} u(v), \tag{8}$$

$$\psi(x,t)|_S = 0, \quad \psi(x,0) = 0, \qquad x \in G. \tag{9}$$

Если $\psi(v) \in W_2^{2.1}(Q)$ то в обоих случаях $J_i'(v) \in W_2^{1.0}(Q)$, поэтому проектирование на U_1 сводится к нормировке по условию $\int_G v(x,t)\, dx = 0$, а проектирование на U_2 сводится к решению задачи Неймана для уравнения Пуассона (см. [1]).

Однако решение экстремальной задачи с нелинейными уравнениями состояния (1) сталкивается с трудностями, связанными с обоснованием сходимости и единственности решения. Эти трудности можно преодолеть, переходя к последовательности линеаризованных задач, например, по методам, изложенным в работах [2, 3]. В этих работах построены итерационные процессы, сходящиеся с любого начального приближения в случае гладкого решения задачи (1)–(3), где на каждом $(k+1)$-м шаге итерации решаются задачи вида (1)–(3). В методе простых итераций левая часть уравнения (1) имеет вид $L_0(u) = u_t - v\Delta u$, а в методе типа Ньютона $L_k(u) = L_0(u) + u_i^k u_{x_i} + u_{x_i}^k u_i$.

Для линеаризованной задачи функционалы $J_i(v)$, $i = 1, 2$, являются выпуклыми, градиенты определяются также формулами (7), а $\psi(v)$ определяется по решению задач вида (8), (9), где $L_0^*(\psi) = -\psi_i - \Delta\psi$, а

$$L_k^*(\psi) = L_0^*(\psi) - \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i^k \psi) + \frac{\partial u_i^k}{\partial x_i}\psi.$$

Ввиду того, что функционалы (4), (5) — квадратические, а операторы проектирования на множества U_i $(i = 1, 2)$ — линейные, удается получить явные формулы для определения параметров α_k в методе наискорейшего спуска [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970, 288 с.
2. *Голичев И. И.* Решение некоторых задач для параболических уравнений методом последовательных приближений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1989, 172 с.
3. *Голичев И. И.* Итерационные методы решения уравнений Навье–Стокса как задачи оптимального управления. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 15, в. 2, с. 280–282.
4. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.