М. И. Толовиков (Череповец, ЧГУ). **Распределение последовательности 1-зависимых случайных индикаторов с рациональной производящей функцией.**

Последовательность случайных величин $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *стационарной последовательностью* 1*-зависимых случайных индикаторов*, если выполнены условия: 1) каждая из случайных величин I_n принимает только два значения, 0 и 1; 2) вероятность $\mathbf{P}\{I_{1+s} = a_1,\ I_{2+s} = a_2,\ \ldots,\ I_{k+s} = a_k\}$ при любых $k \in \mathbf{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{0,1\}$, не зависит от s; 3) случайные векторы $(I_1, I_2, \ldots, I_{i-1})$ и $(I_{i+1}, I_{i+2}, \ldots, I_k)$ независимы при любых $k > 2$, $1 < i < k$.

Пусть $\{0,1\}^*$ — множество всех слов над алфавитом $\{0,1\}$. Определим функцию $A\colon \{0,1\}^* \to \mathbf{R}$ равенствами $A(a_1 a_2 \ldots a_k) = \mathbf{P}\{I_1 = a_1,\ I_2 = a_2,\ \ldots,\ I_k = a_k\}$, $A(e) = 1$, где e — пустое слово. Будем обозначать $|w|$ длину слова w. Введем в рассмотрение формальные производящие функции от бесконечного множества коммутирующих между собой переменных $t, y_0, y_1, y_2, \ldots : \mathbf{a}(\mathbf{y}) = \sum_{w\in\{0,1\}^*} A(w)\mathbf{y}^w$, $a_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A(0^n)t^n$, где $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \ldots)$, $\mathbf{y}^w = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_k}$ при $w = 0^{i_1} 1 0^{i_2} 1 \ldots 1 0^{i_k}$, $\mathbf{y}^e = 1$. Для вычисления $\mathbf{a}(\mathbf{y})$ мы используем конструкцию произведения Адамара. *Произведением Адамара* формальных степенных рядов $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ и $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ называется ряд $f(t) * g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n t^n$.

Теорема 1.

$$\mathbf{a}(\mathbf{y}) = \left(\left(a_0(t)\left(1 + \sum_{i=0}^{\infty} y_i t^{i+1}\right)^{-1}\right)\Big|_{t=1}\right)^{-1} - 1.$$

Выполняя различные подстановки вместо переменных $y_0, y_1, y_2, \ldots$ в функцию $\mathbf{a}(\mathbf{y})$, можно получить производящие функции распределений различных статистик от случайного вектора $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$. Теорема 1 показывает, что распределние этих статистик полностью определяется функцией $a_0(t)$. Поэтому функцию $a_0(t)$ мы называем *производящей функцией* последовательности индикаторов $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$.

П р и м е р. Положим $y_i = x^{i+1}y$, $i = 0, 1, \ldots$ Тогда функция $\mathbf{a}(\mathbf{y})$ переходит в функцию $a(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\{I_1 + I_2 + \cdots + I_n = k\} x^{n+1} y^{k+1}$. Выполняя соответствующую подстановку в равенство теоремы 1 и делая некоторые упрощения, получаем $a(x,y) = y(a_0(x(1-y)) - 1)/(1 - y a_0(x(1-y)))$.

Будем обозначать $\mathbf{a}(\mathbf{y})|_{\mathbf{y}} = \varphi(\mathbf{z})$ результат подстановки в функцию $\mathbf{a}(\mathbf{y})$ вместо $y_0, y_1, \ldots$ значений $\varphi_0(\mathbf{z}), \varphi_1(\mathbf{z}), \ldots$ соответственно, где $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_k)$, $\varphi_0(\mathbf{z}), \varphi_1(\mathbf{z}), \ldots$ — рациональные функции от переменных $z_1, z_2, \ldots, z_k$.

Теорема 2. *Пусть функция $a_0(t)$ рациональна и функция $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(\mathbf{z}) t^i$ также является рациональной функцией от t. Тогда функция $\mathbf{a}(\mathbf{y})|_{\mathbf{y}=\varphi(\mathbf{z})}$ рациональна.*

Определим на множестве $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ отношение частичного порядка $\lhd$ условиями:

$$i \lhd j \Leftrightarrow ((i < j) \vee (i = j \wedge j > n)).$$

Каждой последовательности $(i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}) \in \{1, 2, \ldots, 2n\}^{k+1}$ поставим в соответствие слово $\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}) = a_1 a_2 \cdots a_k$ над алфавитом $\{0,1\}$ следующим образом: $a_s = 0 \ \Leftrightarrow\ i_s \lhd i_{s+1}$, $s = 1, 2, \ldots, k$.

Теорема 3. *Пусть $a_0(t) = (P(t) - Q(t))/(tQ(t))$, где $P(t) = (1 + \alpha_1 t)(1 + \alpha_2 t) \cdots (1 + \alpha_n t)$, $Q(t) = (1 - \beta_1 t)(1 - \beta_2 t) \cdots (1 - \beta_n t)$. Тогда для всех $w \in \{0,1\}^*$*

$$A(w) = \sum_{\sigma(i_1, i_2, \ldots, i_{|w|+1}) = w} \gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \cdots \gamma_{i_{|w|+1}},$$

где $\gamma_i = \alpha_i$ при $i \leqslant n$, $\gamma_i = \beta_{i-n}$ при $i > n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08-01-00078.