А. Л. Ш т р а у с (Ульяновск, УлГУ). **Многомерное обобщение задачи оптимизации наблюдений временно ненаблюдаемых систем.**

В работе, представленной данным докладом, рассматривается многомерное обобщение задачи [1]. Здесь исследуется частично наблюдаемый случайный n-мерный процесс. Смена промежутков наблюдаемости определяется скачками пуассоновского процесса с заданной интенсивностью: при каждом скачке пуассоновского процесса происходит переход к наблюдению следующей компоненты, таким образом, все они наблюдаются попеременно и последовательно.

Так же, как и в двумерном случае, по наблюдениям за исходным процессом находятся его оценка и ошибка оценивания и ставится задача оптимизации процедуры наблюдения: одновременная минимизация ошибки оценивания и частоты смены промежутков наблюдения.

Введем следующие вспомогательные процессы и обозначения: $X_t = (X_t^1, X_2^t, \ldots, X_n^t)^T$ — частично наблюдаемый процесс, $Y_t = (Y_t^1, Y_t^2, \ldots, Y_t^n)^T$ — наблюдения, $\pi_t^\lambda = \sum_{i=1}^\infty I\,\{t \leqslant \tau_i\}$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, $\tau_i = \inf\{t\colon t > 0,\ \pi_t^\lambda = j\}$ — моменты скачков процесса π_t^λ.

Каждая из компонент Y_i периодически позволяет наблюдать соответствующую компоненту X_i, но все они доступны в различные промежутки времени. Переключения описываются n-мерным процессом телеграфного типа, порождаемым процессом π_t^λ:

$$N_t = \begin{pmatrix} N_t^1 \\ N_t^2 \\ \ldots \\ N_t^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \int_0^t N_{s\_}^n \, d\pi_s^\lambda - \int_0^t N_{s\_}^1 \, d\pi_s^\lambda \\ 0 + \int_0^t N_{s\_}^1 \, d\pi_s^\lambda - \int_0^t N_{s\_}^2 \, d\pi_s^\lambda \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0 + \int_0^t N_{s\_}^{n-1} \, d\pi_s^\lambda - \int_0^t N_{s\_}^n \, d\pi_s^\lambda \end{pmatrix}.$$

При этом каждая из компонент $N_t^i \in \{0,1\}$. Процесс X_t предполагается n-мерным процессом Орнштейна–Уленбека, Y_t — процессом, производные компонент которого в различные промежутки времени совпадают с компонентами процесса X_t. Система, полученная после регуляризации модели для осуществления процедуры классической фильтрации, имеет вид

$$dX_t = -Xt\,dt + dW_t, \quad dY_t^\varepsilon = -B_t X_t\,dt + \frac{1}{\varepsilon}\,d\overline{W}_t.$$

Здесь Y_t^ε — вспомогательный процесс, производная которого отличается от Y_t наличием регуляризующей компоненты $\varepsilon^{-1}\,d\overline{W}_t$, $\varepsilon \to \infty$. Процессы π_t^λ, W_t, $\overline{W}_t$ независимы. При построении оценки процесса X_t по схеме Калмана $\widetilde{X}_t = \mathbf{E}\,(X_t | F^{Y,\pi})$ — оценка, $\gamma_t = \mathbf{E}\,(X_t - \widetilde{X}_t)(X_t - \widetilde{X}_t)^T$ — ошибка оценивания. Оказываются справедливыми следующие утверждения.

Утверждение 1. *Существует конечный* $\lim_{t\to\infty}\{\mathbf{E}\,Tr\gamma_t\}$.

Обозначим $F(\lambda) = \lim_{t\to\infty}\{\mathbf{E}\,Tr\gamma_t\} + \lambda$, тогда задача оптимизации частоты наблюдений принимает вид $F(\lambda) \to \min_\lambda$, $\lambda \geqslant 0$.

Утверждение 2. *Существует* $\lambda_{\mathrm{opt}} = \arg\,\min_\lambda F(\lambda)$.

В отличие от [1], справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. *Функция потерь $F(\lambda)$ имеет следующий вид:*

$$F(\lambda) = \lambda - (n-1)\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2}} + n - 1.$$

Функция $F(\lambda)$ выпукла вверх и имеет единственный локальный минимум, который находится численно. Значение λ, доставляющее локальный минимум функции $F(\lambda)$, и есть решение задачи оптимизации.

Автор выражает благодарность А. А. Бутову за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Штраус А. Л.* Задача оптимизации наблюдений временно ненаблюдаемых систем. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 5, с. 952–953.
2. *Липцер Р.Ш.*, *Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1974, 696 с.