Е. С. П а л а м а р ч у к (Москва, ЦЭМИ РАН). **О стахостической оптимальности в модели линейного регулятора с дисконтирующей функцией.**

Исследуются вероятностные свойства управления, оптимального в среднем на бесконечном интервале времени в одномерной задаче стохастического линейного регулятора с дисконтирующей функцией.

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан одномерный случайный процесс $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$, описываемый уравнением

$$dX_t = aX_t\,dt + bU_t\,dt + \sigma\,dW_t, \quad X_0 = x, \tag{1}$$

где $\{W_t\}_{t=0}^{\infty}$ — одномерный стандартный винеровский процесс, a, $b \neq 0$, $\sigma > 0$ — константы. В качестве допустимых управлений рассмотрим такие процессы $U = \{U_t\}_{t=0}^{\infty}$, согласованные с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s,\, s \leqslant t\}$, что уравнение (1) имеет решение. Множество допустимых управлений будем обозначать $\mathcal{U}$. Определим целевой функционал

$$J_T(U^T) = \left\{ \int_0^T f_t(qX_t^2 + rU_t^2)\,dt \right\}, \tag{2}$$

где T — конечный момент времени, $U^T = \{U_t\}_{t\leqslant T}$ — сужение управления $U \in \mathcal{U}$ на интервале $[0, T]$, $q > 0$, $r > 0$ — константы, f_t — дисконтирующая функция. Предполагается, что функция f_t обладает следующими свойствами: 1) $f_t > 0$ для $t \geqslant 0$; 2) f_t — невозрастающая и дифференцируемая на $[0, \infty)$; 3) скорость убывания функции f_t ограничена.

Например, при $f_t \equiv 1$ модель (1)–(2) соответствует стандартному стохастическому линейно-квадратическому регулятору. Если $f_t = e^{-\gamma t}$ $(\gamma > 0)$, то это задача с обычным дисконтированием, при $f_t = (1 + \theta t)^{-\theta_1/\theta}$ $(\theta_1, \theta > 0)$ получаем общий вид задачи гиперболического дисконтирования, а в случае $f_t = m_1 e^{-\alpha t} + (1 - m_1)e^{-\beta t}$ $(\alpha, \beta > 0,\ 0 < m_1 < 1)$ возникает задача с двойным дисконтированием. Такие дисконтные множители традиционно применяются в экологических, экономических и поведенческих моделях [1, 2].

О п р е д е л е н и е 1. Управление $U^* \in \mathcal{U}$ будем называть *оптимальным в среднем на бесконечном интервале времени*, если оно является решением задачи

$$\limsup_{T\to\infty} \mathbf{E}\, J_T(U) \Big/ \int_0^T f_t\,dt \to \inf_{U\in\mathcal{U}}. \tag{3}$$

Показывается, что $\{U_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ имеет вид

$$U_t^* = -\frac{b\Pi_t}{r} X_t^*, \tag{4}$$

где процесс $\{X_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ задается уравнением $dX_t^* = (a - b^2\Pi_t/r)X_t^*\,dt + \sigma\,dW_t$, $X_0^* = x$, Π_t $(t \geqslant 0)$ — такая неотрицательная ограниченная функция, что $\Pi_t = \lim_{T\to\infty} \Pi_t^T$, при этом Π_t^T, $0 \leqslant t \leqslant T$ — решение уравнения $\dot{\Pi}_t^T + (2a + f_t'/f_t)\Pi_t^T - b^2(\Pi_t^T)^2/r + q = 0$, $\Pi_T^T = 0$.

Известно [3], что более сильным (в вероятностном смысле) видом оптимальности является так называемая g-оптимальность почти наверное.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть g_T — положительная невозрастающая функция. Управление $U^* \in \mathcal{U}$ называется *g-оптимальным почти наверное*, если $\limsup_{T\to\infty} g_T(J_T(U^*) - J_T(U)) = 0$ с вероятностью единица при любом $U \in \mathcal{U}$.

Естественным образом возникает вопрос поиска функции g_T, при которой управление U^*, определенное в (4), будет g-оптимальным почти наверное. В [3] было показано, что при $f_t \equiv 1$ указанная оптимальность имеет место для $g_T = o\,(1/\ln T)$. Для задачи (1)–(2) с дисконтирующей функцией f_t доказана следующая теорема.

Теорема 1. 1. *Если* $\lim_{T\to\infty} f_T \ln T = c < \infty$, *то* $g_T = o\,(1)$.

2. *Если* $f_T \ln T \to \infty$ $T \to \infty$, *то* $g_T = o\,(1/(f_T \ln T))$.

Также было доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $\int_0^T f_t\,dt \to \infty$, $T \to \infty$, *то управление* U^*, *задаваемое* (4), *является решением задачи* $\lim\sup_{T\to\infty} J_T(U)/\int_0^T f_t\,dt \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$ *с вероятностью единица.*

Работа поддержана РФФИ, проект № 10-01-00767.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Handbook of contemporary behavioral economics: foundations and developments. Edited by Morris Altman. ed. M.E. Sharpe, 2006, 768 p.
2. *Karp L.* Global warming and hyperbolic discounting. — Journal of Public Economics, 2005, v. 89, p. 261–282.
3. *Белкина Т. А.*, *Кабанов Ю. М.*, *Пресман Э. Л.* О стохастической оптимальности для линейно-квадратического регулятора. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 4, с. 661–675.