М. Ю. З а х а р о в, Е. А. С е м е н ч и н (Краснодар, Промавтоматика, КубГУ). **О построении приближенных решений плоских краевых задач для уравнений со старшим гармоническим оператором.**

Работа, представленная данным докладом, обобщает результаты [1–3] на случай краевых задач для широкого класса уравнений со старшим гармоническим оператором. Для таких задач строится приближенное решение с помощью методики, предложенной в [1–3]. Задачи такого вида могут описывать различные физические процессы.

Пусть $F \in \mathbf{R}^2$ — ограниченная односвязная область с границей $\Sigma \in C^{2+\alpha}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\partial/\partial n$ — дифференцирование по направлению внешней нормали к Σ в точке $\mathbf{y} \in \Sigma$ (здесь приняты обозначения из [2, 3]).

В области G рассматривается задача

$$\begin{aligned} &(\mu(\varphi, \mathbf{x}, t)D + A)\varphi(\mathbf{x}) = \overline{f}, \quad \mathbf{x} \in G \subset \mathbf{R}^2, \quad t > 0, \\ &\varphi = \varphi_0 \ \text{ при } \ t = 0, \quad \varphi = \varphi_s \ \text{ на } \ \Sigma, \end{aligned} \tag{1}$$

где $D = a\partial^2/\partial x_1^2 + b\partial^2/\partial x_2^2$, a и b — константы одинакового знака; $\mu(\varphi, \mathbf{x}, t) \geqslant c > 0$, $c = \text{const}$, A — дифференциальный оператор с производными не выше первого порядка (в частности, нелинейный). Не ограничивая общности рассуждений, полагаем $a = b = 1$.

Предполагается, что решение задачи (1) существует, единственно и входные данные в (1) имеют требуемую для дальнейших рассуждений гладкость.

Аналогично [1–3], процесс построения приближенного решения задачи (1) разобьем на два этапа.

1. Заменим исходную задачу (1) на ее дискретный по времени аналог. Пусть $\Psi_k(\mathbf{x})$ — приближение решения задачи (1) в момент времени t_k $(k = 0, 1, \ldots)$, $t_0 = 0$, $\Psi_0(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x})$, $t_{k+1} - t_k = \tau_k$, $\overline{f}_k = \overline{f}(\mathbf{x_k})$, $\mu_k = \mu(\Psi_k(\mathbf{x}), \mathbf{x}, t_k)$, A_k — дискретный аналог оператора A. Используя неявную аппроксимационную схему, запишем для определения $\Psi_{k+1}(\mathbf{x})$ $(k = 0, 1, \ldots)$ следующие задачи:

$$(\mu_{k+1}\Delta + A_{k+1})\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) = \overline{f}_{k+1}, \quad \mathbf{x} \in G \subset \mathbf{R}^2, \quad \Psi_{k+1}(\mathbf{x}) = \varphi_s(t_k, \mathbf{x}) \ \text{ на } \ \Sigma. \tag{2}$$

2. Построим приближенное решение задачи (2).

Введем вспомогательную задачу:

$$\Delta\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}) = \frac{\Phi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x})}{\mu(\Psi_{k+1}^{(i-1)}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, t_{k+1})}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad \Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x})\Big|_{\Sigma} = \varphi_s(t_{k+1}, \mathbf{x}), \tag{3}$$

где $k = 0, 1, \ldots$

Приближенное решение (3) можно построить методом базисных потенциалов [4].

1. Начальное приближение $\Phi_{k+1}^{(1)}(\mathbf{x})/\mu_{k+1}$ правой части уравнения в (3) выбирается так, чтобы при заданной $\varphi_s(t_{k+1}, \mathbf{x})$ из (3) выполнялось условие: решение (3) при $i = 1$ существует и принадлежит $C^{2+\alpha}(\overline{G})$.

2. Последующие приближения $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ в правой части уравнения в (3) определяются из соотношения

$$\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x}) = -A_{k+1}\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}) + \overline{f}_{k+1}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in G. \tag{4}$$

Предполагаем, что для $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ из (4) при заданной $\varphi_s(t_{k+1}, \mathbf{x})$ из (3) и $\mu(\Psi_{k+1}^{(i)}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, t_{k+1})$ решение (3) также существует и принадлежит $C^{2+\alpha}(\overline{G})$.

3. Процесс построения приближенных решений задачи (3) для приближений в правой части уравнения в (3), определяемых (4), завершаем для заданного $\varepsilon > 0$ на

l_{k+1}-й итерации, если выполнится неравенство $\|\Phi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{x}) - \Phi_{k+1}^{(l_{k+1}+1)}(\mathbf{x})\|_{C(\overline{G}')} < \varepsilon$. В этом случае полагаем $\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) = \Psi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{x})$.

Приведем аналитический вид приближенного решения задачи (2):

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{A}\Bigg(- \int_G \frac{\Phi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{y})}{\mu_{k+1}} \ln\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, dy \\ - \int_\Sigma \left[\varphi_s(t_{k+1},\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial n_y}\ln\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - \left(\sum_{j=1}^{N} c_j^{(k+1)}\alpha_j(\mathbf{y}) + C\right)\ln\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\right] ds_y\Bigg),$$

где $A = 2\pi$ для $x \in G$, $A = \pi$ для $x \in \Sigma$; $c_j^{(k+1)}$ — коэффициенты, определяющие приближение неизвестной плотности $\partial\Psi_{k+1}(\mathbf{y})/\partial n$:

$$\frac{\partial\Psi_{k+1}(\mathbf{y})}{\partial n} \approx \sum_{j=1}^{N} c_j^{(k+1)}\alpha_j(\mathbf{y}) + C, \quad \frac{\Phi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{y})}{\mu_{k+1}} \approx \Delta\Psi_{k+1}(\mathbf{y}), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$\alpha_j(\mathbf{y}) = \ln\frac{1}{|\mathbf{x}^j - \mathbf{y}|} - J_j, \quad \mathbf{y} \in \Sigma, \quad J_j = \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma \ln\frac{1}{|\mathbf{x}^j - \mathbf{y}|}\, ds_y, \quad \mathbf{x}^j \notin \overline{G},$$

$$j = 1, 2, \ldots, N; \quad C = \frac{1}{|\Sigma|}\int_G \frac{\Phi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{y})}{\mu_{k+1}}\, d\mathbf{y}, \quad \Sigma \text{ — мера } |\Sigma|.$$

Аналогично можно построить приближенное решение задачи (1) с граничными условиями второго рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Захаров М.Ю.*, *Семенчин Е.А.* Построение приближенного решения краевой задачи, описывающей рассеяние примеси в атмосфере, методом точечных потенциалов. — Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2009, № 4, с. 20–27.
2. *Семенчин Е. А.*, *Захаров М. Ю.* Приближенное решение плоской краевой задачи для уравнения диффузии с зависящими от концентрации коэффициентами и функцией источника. — Научный журнал КубГАУ, 2010, № 06 (60). Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2010/06/pdf/08.pdf.
3. *Захаров М.Ю.*, *Семенчин Е.А.* Приближенное решение плоских краевых задач с нелинейным уравнением диффузии в изотропной среде. — Вестник МГОУ, серия физика-математика, 2010, № 2, с. 35–46.
4. *Захаров М. Ю.*, *Семенчин Е. А.* О построении приближенного решения плоской задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом точечных потенциалов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 3, с. 463–464.