А. В. Т а р а с о в (Москва, МИРЭА). **Об обобщении критерия биюнктивности Шефера.**

Пусть V_n — n-мерное пространство булевых векторов. В соответствии с [2] булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть:

1) *биюнктивной*, если существует представление f в виде 2-КНФ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{t} (x_{s_{i1}}^{a_{i1}} \vee x_{s_{i2}}^{a_{i2}}); \tag{1}$$

2) *слабо положительной*, если существует представление f в виде КНФ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{t} (x_{s_{i1}}^{a_i} \vee x_{s_{i2}} \vee \cdots \vee x_{s_{ir_i}}); \tag{2}$$

3) слабо отрицательной, если существует представление f в виде КНФ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{t} (x_{s_{i1}}^{a_i} \vee \overline{x}_{s_{i2}} \vee \cdots \vee \overline{x}_{s_{ir_i}}). \tag{3}$$

Множества всех функций соответственно классов 1)–3) обозначим Bi, WP, WN. Конъюнктивные нормальные формы вида (1)–(3) будем называть *приведенными представлениями* функций соответствующих классов. *Рангом* элементарной дизъюнкции назовем число входящих в нее переменных. Подкласс класса WP, в приведенном представлении которых вида (2) имплиценты с отрицанием имеют ранг не более k, а остальные имплиценты — ранг не более r, обозначим $WP_{r,k}$. Аналогичный подкласс класса WN обозначим $WN_{r,k}$. Для всякой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определим множество $E_f = \{\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\colon f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1\}$, которое будем называть *множеством выполняющих векторов* функции f. Пусть $r \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant r$. Определим пороговую функцию $v_{r,k}$ по правилу

$$v_{r,k}(x_1, x-2, \ldots, x_r) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 + x_2 + \cdots + x_r \geqslant k, \\ 0, & \text{если } x_1 + x_2 + \cdots + x_r < k. \end{cases}$$

В частности, $v_{3,2}(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$. Легко видеть, что $v_{r,k}(x_1, x-2, \ldots, x_r) = \vee_{1 \leqslant i_1 < \subset_2 < \cdots < i_r \leqslant r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$.

Аналогичным образом определим функцию $w_{r,k} = v_{r,k} \oplus 1$. Данная функция может быть записана формулой $w_{r,k}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = wedge_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant r} \overline{x}_{i_1} \overline{x}_{i_2} \cdots \overline{x}_{i_r}$.

Определим r-арные операции $v_{r,k}$ и $w_{r,k}$ на множестве V_n как операции покоординатного применения указанных функций к векторам из V_n. Пусть $N \subset V_n$, $r \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant r$. Множество N будем называть *$v_{r,k}$-замкнутым* (*$w_{r,k}$-замкнутым*), если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in N$, $v_{r,k}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in N$ ($w_{r,k}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in N$). В работах [1, 2] доказан критерий биюнктивности, который во введенных обозначениях можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ биюнктивна тогда и только тогда, когда множество E_f является $v_{3,2}$-замкнутым.*

Пусть $r \geqslant 4$, $2 \leqslant k \leqslant \lfloor r/2 \rfloor$. Положим $m = \lceil r/(k-1) \rceil - 1$. Верна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — булева функция. Если $m \geqslant 3$ и множество E_f является $v_{r,k}$-замкнутым, то $f \in WP_{m,2}$. При $k = 2$ данное условие является достаточным, т. е. если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in WP_{r-1,2}$, то множество E_f является $v_{r,2}$-замкнутым.*

Заметим, в частности, что в случае $m = 3$ из условия теоремы 2 следует, что $f \in WP_{m,2} \cap Bi$.

Результат, аналогичный результату теоремы 2, верен и для пороговой функции $w_{r,k}$.

Следствие. *Если $m \geqslant 3$ и множество E_f является $w_{r,k}$-замкнутым, то $f \in WN_{m,2}$. При $k = 2$ данное условие является достаточным.*

Резюмируя вышесказанное, можно сделать следующие выводы: при $r = 3$, $k = 2$ $v_{r,k}$-замкнутость множества E_f эквивалентна биюнктивности функции f по критерию Шефера; при $r \geqslant 4$, $k = 2$ $v_{r,k}$-замкнутость множества E_f эквивалентна принадлежности функции f классу $WP_{r-1,2}$; при $r \geqslant 4$, $3 \leqslant k \leqslant \lfloor r/2 \rfloor$ из $v_{r,k}$-замкнутости множества следует принадлежность функции f классу $WP_{m,2}$, где $m = \lceil r/(k-) \rceil - 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schaefer T.* Complexity of satisfiability problems. — In: Proceedings of the 10 Annual ACM Symposium on theory of computing machinery, 1978, p. 216–226.
2. *Горшков С. П.* О сложности распознавания мультиаффинности, биюнктивности, слабой положительности и слабой отрицательности булевых функций. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 1997, т. 4, в. 2, с. 216–237.