

**А. А. К о н к и н а** (Самара, ГОУ ВПО СамГУ). **Двойная утка и эффект «мнимого исчезновения».**

Рассматривается обобщенная модель Лотки–Вольтерра

$$\dot{x} = x(a - f(y)), \quad \varepsilon \dot{y} = y^p(-b + x(g(y) - \delta h(y))),$$

которая описывает взаимодействие бактерий и бактериофагов. Здесь  $x$  характеризует размер популяции бактерий,  $y$  — популяцию бактериофагов. Функция  $g(y)$  указывает степень кооперации бактериофагов внутри популяции,  $h(y)$  — внутривидовую конкуренцию между бактериофагами, константы  $a, b$  описывают динамику роста бактерий и уменьшение популяции бактериофагов соответственно [1]. Для определенности полагаем  $g(y) = 1 + y$ ,  $f(y) = y + y^2$ ,  $h(y) = y^2$  и получаем сингулярно возмущенную дифференциальную систему вида

$$\dot{x} = x(a - y - y^2), \quad \varepsilon \dot{y} = y(-b + x(1 + y - \delta y^2)).$$

При определенном соотношении между параметрами в данной системе существует цикл, который представляет собой так называемую *двойную траекторию–утку*. Такая траектория может возникнуть в системе, медленная кривая которой имеет два устойчивых и два неустойчивых участка. Цикл проходит сначала вблизи первого устойчивого участка, затем вдоль первого неустойчивого участка. После этого траектория попадает в окрестность второго устойчивого участка и следует сначала вдоль него, а затем вдоль второго неустойчивого участка. Соответствующее значение управляющего параметра  $a$  представимо в виде асимптотического разложения:  $a = \sum_{i=0}^k \varepsilon^i a_i(x) + a^*(\varepsilon)$ .

В работе, представленной данным сообщением, найдено второе приближение для  $a$ :  $a = a_0(z) + \varepsilon a_1(z) + \varepsilon^2 a_2(z)$ . Приведем значения первых двух коэффициентов этого разложения:

$$a_0 = \frac{2\delta + 1}{4\delta^2}, \quad a_1 = -\frac{(2\delta + 1)(\delta + 1)(16\delta^2 + 8\delta + 1)}{128\delta^6 b}.$$

Для частного случая  $b = 3/2$ ,  $\delta = 1/2$  асимптотическое разложение принимает более простой вид:

$$a = 2 - 9\varepsilon - 202\frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Графическое представление данной траектории и его временная развертка представлены ниже.

Доказательство существования цикла–утки и справедливости полученного асимптотического разложения для управляющего параметра основывается на теореме о существовании траектории–утки [2].

Важно отметить, что существование траектории–утки позволяет объяснить эффект «мнимого исчезновения» бактериофагов: они практически не обнаруживаются в течение значительного временного отрезка, вслед за которым наблюдается резкий скачок численности их популяции.

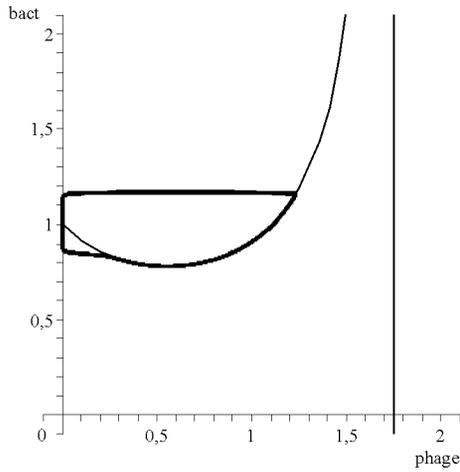


Рис. 1. Двойная утка

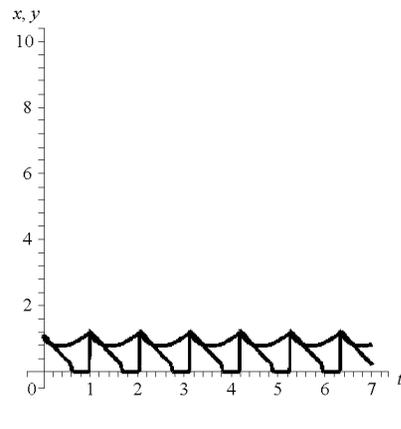


Рис. 2. Графики решений

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-08-00154а.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gavin C., Pokrovskii A., Prentice M., Sobolev V.* Dynamics of a Lotka–Volterra type model with applications to marine phage population dynamics. — *J. Phys. Conf. Ser.*, 2006, v. 55, № 1, p. 80–93.
2. *Соболев В. А., Щепакина В. А.* Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М: Физматлит, 2010.