И. Р. Ш а к у р о в, Р. М. А с а д у л л и н (Уфа, БГПУ). **Алгоритм построения нелинейных интегралов для систем дифференциальных уравнений.**

Переходные процессы в радиотехнике, кинетика химических реакций, динамика биологических популяций, движение космических объектов, модели экономического развития исследуются с помощью ОДУ. При нахождении решений систем ДУ важную роль играют первые интегралы. Известно, что не существует общего метода нахождения нелинейных интегралов для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В связи с этим в данном докладе приводится алгоритм нахождения первых интегралов для систем дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями. Для таких систем нелинейные интегралы будем искать тоже в виде полиномов произвольного порядка.

Рассмотрим систему ОДУ с полиномиальными правыми частями вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{p_i} a_{m^i_{1k} m^i_{2k} \ldots m^i_{nk}} x_1^{m^i_{1k}} x_2^{m^i_{2k}} \cdots x_n^{m^i_{nk}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где p_i — число слагаемых в i-м уравнении, $a_{m^i_{1k} m^i_{2k} \ldots m^i_{nk}}$ — известные буквенные коэффициенты, $M^i_k = m^i_{1k} m^i_{2k} \ldots m^i_{nk}$ — мультииндекс.

Будем искать полиномиальный первый интеграл в виде

$$W = \sum_{s=1}^{q} b_{m_{1s} m_{2s} \ldots m_{ns}} x_1^{m_{1s}} x_2^{m_{2s}} \cdots x_n^{m_{ns}},$$

где $b_{m_{1s} b_{m_{2s}} \ldots m_{ns}}$ — неизвестные коэффициенты.

Используя необходимое и достаточное условие существования первых интегралов для системы (1), запишем равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_i} \, \frac{dx_i}{dt} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева нулю, получим систему $B(a)\, b = 0$ линейных однородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $b_{m_{1s} m_{2s} \ldots m_{ns}}$, где $B(a)$ — матрица с известными коэффициентами, b — неизвестные коэффициенты, которые необходимо найти. Система имеет нетривиальное решение, так как $\det(B(a)) = 0$. Полученную систему решаем относительно неизвестных $b_{m_{1s} m_{2s} \ldots m_{ns}}$.

Подставляем полученные $b_{m_{1s} m_{2s} \ldots m_{ns}}$ в исходную формулу первого интеграла и записываем первый интеграл в виде $\sum_{s=1}^{q} b_{m_{1s} m_{2s} \ldots m_{ns}} x_1^{m_{1s}} x_2^{m_{2s}} \cdots x_n^{m_{ns}} = C$.

Наш алгоритм легко реализовать на одном из математических пакетов (например, в среде Maple).