Е. А. Семенчин, Н. В. Вандина (Ставрополь, СГУ). **Построение решения системы уравнений Сен-Венана методом расщепления.**

Система дифференциальных уравнений Сен-Венана для неустановившегося движения жидкости, при условии движения потока в русле с достаточно большим уклоном дна может быть приведена к виду [1]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{b}\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \left(\frac{Q}{bK}\frac{dK}{dh}\right)\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{K^2}{2bQ}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

при заданных начальных

$$Q(x,0) = \sigma_0(x), \quad b(x,0) = \gamma_0(x), \tag{2}$$

и граничных

$$Q(0,t) = \sigma_1(t), \quad h(0,t) = \gamma_1(t), \quad Q(l,t) = \sigma_2(t), \quad h(l,t) = \gamma_2(t), \tag{3}$$

условиях, где t — время, $0 \leqslant t \leqslant T = \mathrm{const}$, x — пространственная координата, ориентированная по направлению движения, $0 \leqslant x \leqslant l$, $0, l$ — границы рассматриваемого участка реки, J — уклон дна русла, g — ускорение свободного падения, b — ширина русла, $K(h)$ — расходная характеристика русла, $h(x,t)$ — глубина русла, $v(x,t)$ — средняя скорость воды в сечении русла, $Q(x,t)$ — расход воды в указанном сечении.

Построим решение задачи (1)–(3) методом расщепления ее по физическим процессам [2]. Разобьем интервал $[0,T]$ на частичные интервалы $(t_j, t_{j+1}]$, $t = 0,1,\dots,n$, точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Учитывая, что $K(h) = bh^{5/3}/n$, где n — коэффициент шероховатости, построим на интервале $(t_j, t_{j+1}]$ решение задачи

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{h}}{\partial t} + \frac{1}{b}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \overline{Q}}{\partial t} + \frac{5}{3}\frac{\overline{Q}}{b\overline{h}}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial x} = 0,\\
&\overline{Q}^0 = \sigma_0, \quad \overline{h}^0 = \gamma_0 \text{ при } t = t_j, \quad j = 0,\\
&\overline{Q}^j = \widetilde{Q}^j, \quad \overline{h}^j = \widetilde{h}^j \text{ при } t = t_j, \quad j = 1,2,\dots,n,\\
&\overline{Q}^j = \sigma_1, \quad \overline{h}^j = \gamma_1 \text{ при } x = 0, \quad \overline{Q}^j = \sigma_2, \quad \overline{h}^j = \gamma_2 \text{ при } x = l,
\end{aligned} \tag{4}$$

описывающей процесс конвекции для расхода, и задачи

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + \frac{1}{b}\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{b\widetilde{h}^{10/3}}{n^2\widetilde{Q}}\frac{\partial^2 \widetilde{Q}}{\partial^2 x} = 0,\\
&\widetilde{Q}^0 = \overline{Q}^1, \quad \widetilde{h}^0 = \overline{h}^1 \text{ при } t = t_j, \quad j = 0,\\
&\widetilde{Q}^j = \overline{Q}^{j+1}, \quad \widetilde{h}^j = \overline{h}^{j+1} \text{ при } t = t_j, \quad j = 1,2,\dots,n,\\
&\widetilde{Q}^j = \sigma_1, \quad \widetilde{h}^j = \gamma_1 \text{ при } x = 0, \quad \widetilde{Q}^j = \sigma_2, \quad \widetilde{h}^j = \gamma_2 \text{ при } x = l,
\end{aligned} \tag{5}$$

описывающей процесс диффузии для расхода.

Приближенным решением задачи (1)–(3) являются $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}^{j+1}$, $\widetilde{h} = \widetilde{h}^{j+1}$.

Построим решения рассматриваемых задач (4) и (5) конечно-разностным методом на каждом интервале $(t_j, t_{j+1}]$. Аппроксимируем производные в задаче (4) разностными отношениями

$$\frac{\partial \overline{Q}}{\partial t} \approx \frac{\overline{Q}_i^{j+1} - \overline{Q}_i^j}{\tau}, \quad \frac{\partial \overline{h}}{\partial t} \approx \frac{\overline{h}_i^{j+1} - \overline{h}_i^j}{\tau}, \quad \frac{\partial \overline{Q}}{\partial x} \approx \frac{\overline{Q}_{i+1}^{j+1} - \overline{Q}_{i-1}^{j+1}}{2s}.$$

Запишем неявную разностную схему построения решения (4) в матричном виде:

$$\overline{A}_i^j \overline{Z}_{i-1}^{j+1} - \overline{B}_i^j \overline{Z}_i^{j+1} - \overline{A}_i^j \overline{Z}_{i+1}^{j+1} = -\overline{F}_i^j,$$
$$\overline{Z}_i^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0(x_i) \\ \gamma_0(x_i) \end{pmatrix}, \quad \overline{Z}_0^{j+1} = \begin{pmatrix} \sigma_1(t_{j+1}) \\ \gamma_1(t_{j+1}) \end{pmatrix}, \quad \overline{Z}_N^{i+1} = \begin{pmatrix} \sigma_2(t_{j+1}) \\ \gamma_2(t_{j+1}) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$Z_i^j = \begin{pmatrix} \overline{Q}_i^j \\ \overline{h}_i^j \end{pmatrix}, \quad \overline{A}_i^j = \frac{\tau}{2s} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5\overline{Q}_i^j & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{B}_i^j = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 3b\overline{h}_i^j & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{F}_i^j = \begin{pmatrix} b\overline{h}_i^j \\ 3b\overline{h}_i^j \overline{Q}_i^j \end{pmatrix}.$$

Решение схемы (6) будем искать методом линейной факторизации:

$$\overline{Z}_i^{j+1} = \overline{\alpha}_i \overline{Z}_{i+1}^{j+1} + \beta_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{7}$$

Коэффициенты вычисляются по формулам

$$\overline{\alpha}_{i+1} = (\overline{A}_{i+1}^j \overline{\alpha}_i - \overline{B}_{i+1}^j)^{-1} \overline{A}_{i+1}^j, \quad \overline{\beta}_{i+1} = (\overline{A}_{i+1}^j \overline{\alpha}_i - \overline{B}_{i+1}^j)^{-1} (\overline{A}_{i+1}^j \overline{\beta}_i + \overline{F}_{i+1}^j). \tag{8}$$

На первом этапе выполним прямую прогонку по формулам (8) и определим значения коэффициентов $\overline{\alpha}_i$, $\overline{\beta}_i$ для всех внутренних точек области, пользуясь начальными условиями $\overline{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{\beta}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1(t_{j+1}) \\ \gamma_1(t_{j+1}) \end{pmatrix}$. Затем с помощью краевого условия $\overline{Z}_N^{j+1} = \begin{pmatrix} \sigma_2(t_{j+1}) \\ \gamma_2(t_{j+1}) \end{pmatrix}$ выполним обратную прогонку и вычислим $\overline{Z}_i^{j+1}$, $i = N-1, N-2, \ldots, 1$, по формуле (7).

Аналогично построим решение задачи (5). Производные аппроксимируем конечными разностями

$$\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial t} \approx \frac{\widetilde{Q}_i^{j+1} - \widetilde{Q}_i^j}{\tau}, \quad \frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} \approx \frac{\widetilde{h}_i^{j+1} - \widetilde{h}_i^j}{\tau},$$
$$\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial x} \approx \frac{\widetilde{Q}_{i+1}^{j+1} - \widetilde{Q}_{i-1}^{j+1}}{2s}, \quad \frac{\partial^2 \widetilde{Q}}{\partial x^2} \approx \frac{\widetilde{Q}_{i+1}^{j+1} - 2\widetilde{Q}_i^{j+1} + \widetilde{Q}_{i-1}^{j+1}}{s^2}.$$

Запишем систему в матричном виде:

$$\widetilde{A}_i^j \widetilde{Z}_{i-1}^{j+1} - \widetilde{B}_i^j \widetilde{Z}_i^{j+1} + \widetilde{C}_i^j \widetilde{Z}_{i+1}^{j+1} = -\widetilde{F}_i^j,$$
$$\widetilde{Z}_i^0 = \begin{pmatrix} \overline{Q}(x_i) \\ \overline{h}(x_i) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{Z}_0^{j+1} = \begin{pmatrix} \sigma_1(t_{j+1}) \\ \gamma_1(t_{j+1}) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{Z}_N^{j+1} = \begin{pmatrix} \sigma_2(t_{j+1}) \\ \gamma_2(t_{j+1}) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где

$$\widetilde{Z}_i^j = \begin{pmatrix} \widetilde{Q}_i^j \\ \widetilde{h}_i^j \end{pmatrix}, \quad c = \frac{b(\widetilde{h}_i^j)^{10/3}}{s}, \quad \widetilde{A}_i^j = \frac{\tau}{2s} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_i^j = \begin{pmatrix} 0 & b \\ n^2 \widetilde{Q}_i^j + \tau c/s & 0 \end{pmatrix},$$
$$\widetilde{C}_i^j = \frac{\tau}{2s} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{F}_i^j = \begin{pmatrix} b\widetilde{h}_i^j \\ n^2 (\widetilde{Q}_i^j)^2 \end{pmatrix}.$$

Решение (9) также будем искать методом прогонки:

$$\widetilde{Z}_i^{j+1} = \widetilde{\alpha}_i \widetilde{Z}_{i+1}^{j+1} + \widetilde{\beta}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{10}$$

Рекуррентные формулы для коэффициентов имеют вид

$$\widetilde{\alpha}_{i+1} = (\widetilde{B}_{i+1}^j - \widetilde{A}_{i+1}^j \widetilde{\alpha}_i)^{-1} \widetilde{C}_{i+1}^j, \quad \widetilde{\beta}_{i+1} = (\widetilde{B}_{i+1}^j - \widetilde{A}_{i+1}^j \widetilde{\alpha}_i)^{-1} (\widetilde{F}_{i+1}^j + \widetilde{A}_{i+1}^j \widetilde{\beta}_i).$$

Найдем $\widetilde{\alpha}_n$, $\widetilde{\beta}_n$ с начальными условиями $\widetilde{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\beta}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1(t_{j+1}) \\ \gamma_1(t_{j+1}) \end{pmatrix}$. Используя краевое условие $\widetilde{Z}_N^{j+1} = \begin{pmatrix} \sigma_2(t_{j+1}) \\ \gamma_2(t_{j+1}) \end{pmatrix}$, выполним обратную прогонку и вычислим $\widetilde{Z}_i^{j+1}$, $i = N-1, N-2, \ldots, 1$, во внутренних точках области по формуле (10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Семенчин Е. А., Вандина Н. В.* Расход воды в сечении русла горно-равнинной реки. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 17, в. 1, с. 139–140.
2. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982, 320 с.
3. *Кюнж Ж. А., Холли Ф. М., Вервей А.* Численные методы в задачах речной гидравлики. М.: Энергоатомиздат, 1985, 256 с.