Н. М. Нечитайло (Ростов-на-Дону, РГУПС). **Применение вспомогательных матриц для уточнения нижней границы целевой функции в многоиндексных минимаксных моделях транспортного типа.**

Рассматривается задача, в которой ресурсы из исходных пунктов поступают в пункты потребления после обработки в промежуточных пунктах. Для простоты изложения рассмотрим двустадийную модель. Пусть X_{ikj} — количество ресурса, доставляемое из базы A_i в B_j через пункт обработки Q_k. Будем полагать, что время обработки линейно зависит от объема поступившей партии. Требуется определить план $\|x_{ikj}\|$, при котором $F = \max_{i,k,j} f(x_{ikj}) \to \min$, где

$$f(x_{ikj}) = \begin{cases} t_{ikj} + c_k x_{ikj}, & x_{ikj} > 0, \\ 0, & x_{ikj} = 0 \end{cases}$$

при транзитных перевозках,

$$f(x_{ikj}) = \begin{cases} \max_i(t'_{ik} + c_k x_{ikj}) + t''_{kj}, & x_{ikj} > 0, \\ 0, & x_{ikj} = 0, \end{cases}$$

при перевозках с накоплением, $t_{ikj} = t'_{ik} + t''_{kj}$ — время доставки из i-й базы в j-й пункт назначения через k-й пункт обработки.

Ограничения:

$$\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} x_{ikj} \leqslant a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s} x_{ikj} \leqslant b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ikj} \leqslant q_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, s,$$

$$x_{ikj} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots, s, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Предлагается определить нижнюю границу целевой функции F_n: в каждой строке и столбце матрицы перевозок определить минимальное время и среди них найти максимальное время $t_{i0,h0,j0}$. Затем вычислить ограничения на величину перевозимого ресурса по каждому маршруту d_{ikj}:

$$d_{ikj} = \begin{cases} \min_{i,k,j}\{a_i, q_k, b_j, (F_n - t_{ikj})/c_k\}, & c_k > 0,\ t_{ikj} \leqslant F_n, \\ \min_{i,k,j}\{a, q_k, b_j\}, & c_k = 0,\ t_{ikj} \leqslant F_n, \\ 0, & t_{ikj} > F_n, \end{cases} \tag{1}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, n$, для решения задачи о максимальном потоке в сети с ограниченными пропускными способностями. Найденная F_n может быть существенно уточнена. После вычисления d_{ikj} по правилу (1) необходимо проверить выполнение условий

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} d_{ikj} \geqslant a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \\ &\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s} d_{ikj} \geqslant b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \\ &\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ikj} \geqslant q_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, s. \end{aligned} \tag{2}$$

Невыполнение первого условия свидетельствует о невозможности вывоза всех ресурсов из исходных пунктов, невыполнение второго — о невозможности полного удовлетворения пунктов назначения, невыполнение третьего — о невозможности полного удовлетворения потребностей пунктов промежуточной обработки. При невыполнении любого из условий (2) увеличим значение F_n до следующего по возрастанию значения и вернемся к проверке выполнения условий (2).

Следующий этап уточнения F_n: проверка выполнения условий (2) на вспомогательных матрицах, поскольку матрица перевозок двустадийной, а следовательно, трехмерной задачи примера (а в общем случае — многомерной задачи), представлена в двумерном виде: первая вспомогательная матрица, в которой $x'_{jih} = x_{ihj}$, $d'_{jih} = d_{ihj}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $h = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, n$; вторая (для двустадийной задачи — последняя) вспомогательная матрица, в которой $x''_{hij} = x_{ihj}$, $d''_{hij} = d_{ihj}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $h = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Изложенный алгоритм может быть распространен и на многостадийные задачи, однако в этом случае возрастает число вспомогательных матриц перевозок, которое в общем случае равно $p + 1$, где p — число стадий промежуточной обработки.