А. В. Чернов, Т. С. Калинин (Ростов-на-Дону, РГСУ). **Спектральные преобразования дискретных функций для вычисления логических производных.**

Современные цифровые устройства и устройства вычислительной техники проектируются с применением математического аппарата дискретных функций. При разработке таких устройств неизбежно возникают вопросы, касающиеся надежности их функционирования. Решать вопросы повышения надежности устройств, построенных на логических схемах, можно разными способами: более затратными, но менее наукоемкими в виде физического дублирования и, напротив, исследованиями, проводимыми на этапах проектирования средств вычислительной, в том числе микропроцессорной техники.

Одним из способов повышения надежности проектируемых логических устройств является построение схем с учетом свойства легкой тестируемости, которое обеспечивается приведением реализуемых дискретных функций к полиномиальному базису специального вида, связанному с разложением функции в ряд и задачей нахождения коэффициентов этого ряда, которые и являются логическими производными. Исследования логических (а для булевых функций булевых) производных начались свыше полувека назад [1] в связи с интенсивным развитием цифровой техники, они актуальны по нынешнее время [2]. Одной из областей применения логических производных является нахождение логических функций, являющихся тестовыми функциями для функций, реализующих логику работы цифрового устройства. Усложнение функций устройств приводит к усложнению задач нахождения тестовых функций. Для некоторых устройств, работающих в реальном времени, вычисление тестовых функций связано с вычислением логических производных, которое также должно выполняться в реальном времени. В связи с указанными проблемами ниже рассматривается быстрый метод спектрального преобразования дискретной функции для нахождения логических производных.

Пусть булева функция f задана в векторном виде выходных значений $\mathbf{Y} = (f(0), f(1), \ldots, f(2^n-1))^T$, где n — число входных значений. Спектральное преобразование булевой функции в общем случае имеет вид $\mathbf{R} = \mathbf{T}^n\mathbf{Y}$, где $\mathbf{T}^n$ — матрица размерности $2^n \times 2^n$, зависящая от вида выбираемого преобразования. Для булевых функций подходящими оказываются четыре вида спектральных преобразований: Уолша, Рида–Маллера, арифметическое и Наара. Рассмотрим преобразование Рида–Маллера, так как коэффициенты, получаемые при преобразовании, являются логическими производными [3]. Матрица преобразования Рида–Маллера $\mathbf{M}^n$ определяется рекурсивным способом: $\mathbf{M}^0 = [I]$, $\mathbf{M}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{n-1} & 0 \\ \mathbf{M}^{n-1} & \mathbf{M}^{n-1} \end{bmatrix}$. Спектральное представление булевой функции в таком случае $\mathbf{R} = \mathbf{M}^n\mathbf{Y}$. Так как матричное умножение должно выполняться в конечном поле Галуа GF (2) , то суммирование происходит по модулю 2 и $\mathbf{M}^n$ может быть представлена в виде $\mathbf{M}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{M}^n = \otimes_{i=1}^n \mathbf{M}^1$, где $\otimes$ — Кронекерово (прямое) произведение матриц.

Утверждение 1. $[\otimes_{i=1}^n \mathbf{M}]^{-1} = \otimes_{i=1}^n M^{-1}$.

Доказательство следует из свойства ассоциативности Кронекерова произведения и итеративного применения равенства $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$.

Утверждение 2. $(\mathbf{M}^n)^{-1} = \mathbf{M}^n$ *над полем* GF (2).

Доказательство следует из утверждения 1 и равенства $(\mathbf{M}^1)^{-1} = \mathbf{M}^1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 09-08-00097а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Akers S.B.* On a theory of Boolean functions. — J. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1959, v. 7, № 4, p. 487–498.
2. *Posthoff C.*, *Steinbach B.* Logic Functions and Equations. Binary Models for Computer Science. Springer, 2003, 392 p.
3. *Чернов А. В.* Модели и методы дискретного анализа и синтеза в задачах технической диагностики информационных систем. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2009, 170 с.