А. Л. Ш т р а у с (Ульяновск, УлГУ). **Задача оптимизации наблюдений эпизодически наблюдаемого процесса.**

В работе, представленной данным докладом, рассмотрен эпизодически наблюдаемый случайный процесс, траектории которого предполагаются видимыми только в случайные моменты времени. Чередование моментов видимости и промежутков невидимости определяется пуассоновским процессом с заданной интенсивностью λ: траектории эпизодически наблюдаемого процесса видимы только в моменты скачков пуассоновского процесса.

Рассмотрим задачу оптимизации интенсивности наблюдений при условии, что имеется плата за частоту проведения наблюдений, т. е. стоимость наблюдений возрастает с ростом их частоты. Исходный процесс восстанавливается по наблюдениям, при этом отслеживается оценка частично наблюдаемого процесса и соответствующая ошибка. Поскольку частота проведения наблюдений есть интенсивность пуассоновского процесса, то ошибка оценивания зависит от λ.

Введем следующие вспомогательные процессы и обозначения: X_t — частично наблюдаемый процесс, Y_t — наблюдения, при этом X_t эпизодически совпадает с Y_t. Запишем это формально. Для этого введем в рассмотрение пуассоновский процесс с интенсивностью λ: $\pi_t^\lambda = \sum_{i=1}^\infty I\,\{\tau_i \leqslant t\}$ и $\widetilde{\pi}_t^\lambda = \lambda t$, где $\tau_i = \inf\{t\colon\ t > 0,\ \pi_t^\lambda = i\}$ — моменты скачков процесса π_t^λ.

Пусть X_t — процесс Орнштейна–Уленбека: $dX_t = aX_t\,dt + \sigma\,dW_t$, а Y_t — процесс, значения которого в моменты скачков пуассоновского процесса совпадают со значениями процесса X_t: $dY_t = X_t\,d\pi_t^\lambda - Y_t\,d\pi_t^\lambda = (X_t - Y_t)\,d\pi_t^\lambda$.

Таким образом, получаем следующую модель:

$$dX_t = aX_t\,dt + \sigma\,dW_t, \quad dY_t = (X_t - Y_t)\,d\pi_t^\lambda.$$

Пусть теперь $\widetilde{X}_t = \mathbf{E}\,(X_t | F^{Y,\pi})$ — оценка эпизодически наблюдаемого процесса, $\gamma_t = \mathbf{E}\,(X_t - \widetilde{X}_t)(X_t - \widetilde{X}_t)^T$ — ошибка оценивания. Найдем выражение для оценки.

Пусть t^* — произвольный момент времени. Обозначим $\tau = \tau_k$, $k = \max\{i\colon\ i < t^*\}$ и рассмотрим процесс X_t, начиная с момента времени τ, сместив начало временной оси в момент τ последнего скачка, предшествующего t^*. Тогда t будет означать время, прошедшее с момента τ.

Теорема 1. *Оценка $\widetilde{X}_t$ имеет вид $\widetilde{X}_{\tau+t} = X_\tau\, e^{at}$.*

В задаче оптимизации рассмотрим функцию потерь $\varphi(\lambda) = T^{-1}(\mathbf{E}\int_0^T (X_s - \widetilde{X}_s)^2\,ds + \alpha\lambda T)$.

Теорема 2. *Задача оптимизации $\varphi(\lambda) \to \min_\lambda$, $\lambda \geqslant 0$, имеет единственное решение.*

Доказательства результатов проведены в терминах семимартингальных методов.

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., Государственный контракт № 02.740.11.0610.

Автор выражает благодарность А. А. Бутову за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Штраус А. Л.* Задача оптимизации наблюдений временно ненаблюдаемых систем. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 5, с. 952–953.