Н. М. Меженная, В. Г. Михайлов (Москва, МГТУ, МИАН).
Нижние оценки для вероятности вложения с произвольным допуском.

Рассмотрим следующее обобщение задачи о плотном вложении, поставленной в работе [1]. Пусть $X_n = \{x_i\}_{i=1}^n$ и $Y_m = \{y_i\}_{i=1}^m$ — последовательности знаков алфавита $A_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Будем говорить, что последовательность X_n вкладывается с допуском $d \geqslant 1$ в начало последовательности Y_m, если $n \leqslant m$ и найдутся такие натуральные числа $0 = j_0 < j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leqslant m$, $j_{k+1} - j_k \in \{1, 2, \ldots, d+1\}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, что $x_k = y_{j_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (при этом будем говорить, что знак x_k вставлен в Y_m на j_k-м месте). Для обозначения вложения с допуском 1 ранее (см. [1], [2]) был использован термин «плотное вложение».

В работах [1], [2] были получены оценки вероятности плотного вложения заданной последовательности в начало последовательности, образованной независимыми случайными величинами, распределенными на множестве A_N равномерно. В настоящем докладе содержится обобщение этих результатов на случай вложения с произвольным заданным допуском.

Пусть $P_m^d(X_n)$ — вероятность того, что фиксированная последовательность X_n может быть вложена с заданным натуральным допуском d в последовательность Y_m из независимых случайных величин, равномерно распределенных на множестве A_N. Из теоремы 1.2 работы [3] вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть знаки последовательности $Y_m = \{y_i\}_{i=1}^m$ распределены на множестве A_N независимо и равномерно. Тогда для любого $m \geqslant n$*

$$P_m^d(X_n) \geqslant \frac{1}{N^n} \sum_{\substack{k_0+k_1+\cdots+k_d=n \\ 0\leqslant k_1+2k_2+\cdots+dk_d\leqslant m-n}} \frac{n!}{k_0!\,k_1!\cdots k_d!}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k_1+2k_2+\cdots+dk_d}, \tag{1}$$

причем знак равенства достигается для последовательностей X_n, состоящих из одинаковых знаков.

Из (1) следует, что $P_m^d(X_n) \geqslant (1-(1-N^{-1})^{d+1})^n$ при $m \geqslant (d+1)n$.

Оценка (1) не учитывает вид вкладываемой последовательности. Она может быть уточнена, если рассмотреть вспомогательный способ вложения X_n в Y_m (будем называть этот способ C1). Ограничимся случаем плотного вложения ($d=1$). Пусть n четно.

1. Разбиваем последовательность X_n на пары $\{x_{2i-1}, x_2\}$, $i \geqslant 1$.

2. Перебираем все возможные варианты плотного вложения пары $\{x_1, x_2\}$ на места с номерами 1, 2, 3, 4. Если существует хотя бы одно такое вложение, то выбираем из них то, в котором знак x_2 вставлен наиболее близко к месту с номером 1.

3. Далее будем действовать рекурсивно. Пусть знак $x_{2(i-1)}$, $i \geqslant 2$, вставлен в последовательность Y_m на k-м месте ($k \geqslant 2(i-1)$). Перебираем все возможные варианты плотного вложения пары знаков $\{x_{2i-1}, x_{2i}\}$ на места с номерами $k+1$, $k+2$, $k+3$, $k+4$. Если существует хотя бы одно такое вложение, то выбираем из них то, в котором знак x_{2i} вставлен наиболее близко к месту с номером k. Если вложение невозможно, то считаем, что последовательность X_n не может быть вложена способом C1 в Y_m.

Теорема 2. *Пусть $\mu_1(X_n) = \sum_{i=1}^{n/2} I\{x_{2i-1} \neq x_{2i}\}$. Пусть знаки последовательности $Y_m = \{y_i\}_{i=1}^m$ распределены на множестве A_N независимо и равномерно. Тогда для любого $m \geqslant 2n$*

$$P_m^1(X_n) \geqslant N^{-2n}((2N-1)^2+N-1)^{\mu_1(X_n)}(2N-1)^{n-2\mu_1(X_n)}. \tag{2}$$

З а м е ч а н и е. Оценка (2) допускает обобщение на случай произвольных n и d.

Предложенный подход также позволяет получить нижнюю оценку для среднего вероятности вложения с допуском d, когда вкладываемая последовательность является случайной.

Теорема 3. *Пусть* X_n *— последовательность независимых случайных величин длины* $n = kr$, *знаки которой имеют распределение* P_X *на множестве* $A_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$. *Пусть* $Y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ *— последовательность независимых случайных величин, равномерно распределенных на* A_N, *не зависящая от* X_n. *Тогда*

$$E_{P_X} P^d_{(d+1)n}(X_n) \geqslant \left(E_{P_X} P^d_{r(d+1)}(X_r) \right)^k.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 08-01-00078а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Golic J. Dj.* Constrained embedding probability for two binary strings. — SIAM J. Discrete Math., 1996, v. 9, № 3, p. 360–364.
2. *Михайлов В. Г.*, *Меженная Н. М.* Оценки для вероятности плотного вложения одной дискретной последовательности в другую. — Дискретн. матем., 2005, т. 17, в. 3., с. 19–27.
3. *Меженная Н. М.* Предельные теоремы в задаче о плотном вложении и плотных сериях в дискретных случайных последовательностях. Дисс. на соискание уч. ст. кандидата физ.-матем. наук, М.: МИЭМ, 2009.