А. В. Шкляев (Москва, МГУ). **Большие уклонения статистик взлета, падения и размаха.**

Настоящий доклад посвящен большим уклонениям статистик «взлета» (перепада от минимального значения перед максимумом до максимума), «падения» (перепада от минимального значения до максимального после него) и «размаха» (перепада между минимумом и максимумом), определенных на случайном блуждании.

Будем рассматривать случайное блуждание $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, где X_i — независимые одинаково распределенные (н. о. р) случайные величины (сл. в.) с функцией распределения (ф. р.) $F(x)$, удовлетворяющие свойствам

$$\mathbf{E}\, X = 0, \quad R(h) = \mathbf{E}\, e^{hX} < \infty, \qquad 0 < h < h^+, \tag{1}$$

где X здесь и далее — общее обозначение для величины с распределением $F(x)$. Дополнительно потребуем нерешетчатость $F(x)$. Для теорем 2, 3 нам также потребуются условия

$$\mathbf{E}\, X = 0, \quad R(h) < \infty, \qquad -h^- < h < 0. \tag{2}$$

Введем ряд параметров, используемых в теории больших уклонений (см., например, [1]): $m(h) = d(\ln R(h))/dh$, $m^+ = \lim_{h\to h^+-0} m(h)$, $m^- = \lim_{h\to h^-+0} m(h)$, $\sigma^2(\theta) = dm(h)/dh$. Единственное решение уравнения $m(h) = \theta$ при $\theta \in (0, m^+)$ будем обозначать h_θ. Положим $\Lambda(\theta) = \theta h_\theta - \ln R(h_\theta)$.

Для любого $\theta \in (0, m^+)$ введем сопряженную к $F(x) = \mathbf{P}\{X \leqslant x\}$ функцию распределения (ф. р.) $F^\theta(x) = R(h_\theta)^{-1} \int_{-\infty}^x e^{h_\theta y}\, dF(y)$. Обозначим X^θ случайную величину с ф. р. F^θ, $X_1^\theta, X_2^\theta, \ldots$ — последовательность н. о. р. сл. в. с ф. р. F^θ, $S_n^\theta = \sum_{i=1}^n X_i^\theta$. Для величин, связанных с блужданием S_n^θ, будут использоваться такие же обозначения, что и для блуждания S_n, с добавлением верхнего индекса θ.

Для вероятностей больших уклонений статистик $M_n = \max\{S_i,\ i \leqslant n\}$ и S_n при выполнении условий (1) справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{P}\{S_n \geqslant \theta n\} = (1 + o(1)) C(\theta) e^{-\Lambda(\theta) n} n^{-1/2}, \qquad n \to \infty, \tag{3}$$

$$\mathbf{P}\{M_n \geqslant \theta n\} = (1 + o(1)) C(\theta) D(\theta) e^{-\Lambda(\theta) n} n^{-1/2}, \qquad n \to \infty, \tag{4}$$

где $D(\theta) = \mathbf{P}\{S_i^\theta > 0,\ i > 0\} \sum_{i=0}^\infty \mathbf{P}\{S_j \leqslant 0,\ j \leqslant i\} R(h_\theta)^{-i}$, $C(\theta) = (\sqrt{2\pi} h_\theta \sigma(h_\theta))^{-1}$ (см. [1], [2]).

В данном докладе даются ответы на аналогичные (3), (4) вопросы для статистик взлета $R_n = \max\{S_i, i \leqslant n\} - \min\{S_i, i \leqslant \tau_n^M\}$, падения $F_n = \max\{S_i, i \geqslant \tau_n^m\} - \min\{S_i, i \leqslant n\}$, $L_n = \max\{S_i, i \leqslant n\} - \min\{S_i, i \leqslant n\}$, где τ_n^M, τ_n^m — моменты первого достижения максимума и последнего достижения минимума блужданием S_n.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1). *Тогда следующее соотношение выполнено равномерно по* $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, m^+)$, $|u_n| \leqslant \gamma_n = o(\sqrt{n})$:

$$\mathbf{P}\{R_n \geqslant \theta n + u_n\} = (1 + o(1)) e^{-h_\theta u_n} D^2(\theta) C(\theta) e^{-\Lambda(\theta) n} n^{-1/2}, \qquad n \to \infty.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (2). *Тогда следующее соотношение выполнено равномерно по* $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (m^-, 0)$, $|u_n| \leqslant \gamma_n = o(\sqrt{n})$:

$$\mathbf{P}\{F_n \geqslant (-\theta) n + u_n\} = (1 + o(1)) e^{-h_\theta u_n} F^2(\theta) C(\theta) e^{-\Lambda(\theta) n} n^{-1/2}, \qquad n \to \infty,$$

где $F(\theta) = \mathbf{P}\{S_i^\theta < 0, i > 0\} \sum_{i=0}^\infty \mathbf{P}\{S_j \geqslant 0, j \leqslant i\} R(h_\theta)^{-i}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1), (2). *Тогда следующее соотношение выполнено равномерно по* $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (0, \min(-m^-, m^+))$, $|u_n| \leqslant \gamma_n = o(\sqrt{n})$:

$$\mathbf{P}(L_n \geqslant \theta n + u_n\} = (1 + o(1)) (\mathbf{P}\{(R_n \geqslant \theta n + u_n\} + \mathbf{P}\{F_n \geqslant \theta n + u_n\}), \qquad n \to \infty.$$

З а м е ч а н и е 1. Теоремы 1 и 2 позволяют явно выписать асимптотику в теореме 3.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 1 справедлива при замене в условии (1) условия $\mathbf{E}\,X = 0$ на $\mathbf{E}\,X \geqslant 0$, теорема 2 — при замене в условии (2) условия $\mathbf{E}\,X = 0$ на $\mathbf{E}\,X \leqslant 0$. Случаи $\mathbf{E}\,X < 0$ в первой теореме и $\mathbf{E}\,X > 0$ во второй качественно отличаются (см. [3]).

З а м е ч а н и е 3. Иногда статистиками взлета и падения называют $\max\{S_i - S_j,\, j < i \leqslant n\}$, $\max\{S_i - S_j,\, i < j \leqslant n\}$, отличные от R_n, F_n. Для них условия теорем 1, 2 также справедливы.

Теоремы 1–3 доказываются методами работы [2], открывая возможности для исследования других функционалов, связанных с экстремальными значениями блуждания на отрезке. Использование этих результатов, представленных с явно выражающимися константами, позволяет решать экстремальные задачи больших уклонений, появляющиеся в различных сферах науки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петров В.В.* О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, с. 310–322.
2. *Шкляев А. В.* Предельные теоремы для случайного блуждания при условии большого уклонения максимума. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 53, в. 3, с. 590–598.
3. *Korshunov D. A.* One-dimensional asymptotically homogeneous Markov chains: Cramer transform and large deviations probabilities. — Siberian Advances in Mathematics, 2004, v. 14, № 4, p. 30–70.