И. С. О р л о в а, **С. Я. Ш а т с к и х** (Самара, СГАУ, СамГУ). **Уравнения Пфаффа для условных квантилей.**

Для семейства случайных величин $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ с положительной на $\mathbf{R}^n$ совместной плотностью и распределениями вероятностей

$$F_{12\ldots n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1,\ \xi_2 \leqslant x_2,\ \ldots,\ \xi_n \leqslant x_n\},$$
$$F_{1|2\ldots n}(x_1 \,|\, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1 \,|\, \xi_2 = x_2,\ \ldots,\ \xi_n = x_n\},$$
$$F_{i|n}(x_i \,|\, x_n) = \mathbf{P}\{\xi_i \leqslant x_i \,|\, \xi_n = x_n\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

мы рассматриваем условные квантили (медианы) как поверхности или кривые постоянного уровня, проходящие через отмеченную точку $\mathbf{x}^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ) \in \mathbf{R}^n$:

$$F_{1|2\ldots n}\Bigl(q_{1|2\ldots n}^{(\mathbf{x}^\circ)}(x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_2, \ldots, x_n\Bigr) \equiv F_{1|2\ldots n}(x_1^\circ \,|\, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ),$$
$$F_{i|n}\Bigl(q_{i|n}^{(x_i^\circ, x_n^\circ)}(x_n) \,|\, x_n\Bigr) \equiv F_{i|n}(x_i^\circ \,|\, x_n^\circ), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что для многомерного распределения вероятностей $F_{12\ldots n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполняется свойство *воспроизводимости условных квантилей*, если система тождеств

$$q_{1|2\ldots n}^{(\mathbf{x}^\circ)}\Bigl(x_2, q_{3|2}^{(x_2^\circ, x_3^\circ)}(x_2), \ldots, q_{n|2}^{(x_2^\circ, x_n^\circ)}(x_2)\Bigr) \equiv q_{1|2}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}(x_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_{1|2\ldots n}^{(\mathbf{x}^\circ)}\Bigl(q_{2|n}^{(x_2^\circ, x_n^\circ)}(x_n), \ldots, q_{n-1|n}^{(x_{n-1}^\circ, x_n^\circ)}(x_n), x_n\Bigr) \equiv q_{1|n}^{(x_1^\circ, x_n^\circ)}(x_n)$$

имеет место для любой отмеченной точки $\mathbf{x}^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ) \in \mathbf{R}^n$.

Геометрически свойство воспроизводимости условных квантилей (1) означает, что кривые, параметризованные «малыми» условными квантилями

$$\gamma_2^{(\mathbf{x}^\circ)}(x_2) = \Bigl\{q_{1|2}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}(x_2), x_2, q_{3|2}^{(x_2^\circ, x_3^\circ)}(x_2), \ldots, q_{n|2}^{(x_2^\circ, x_n^\circ)}(x_2)\Bigr\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma_n^{(\mathbf{x}^\circ)}(x_n) = \Bigl\{q_{1|n}^{(x_1^\circ, x_n^\circ)}(x_n), q_{2|n}^{(x_2^\circ, x_n^\circ)}(x_n), \ldots, q_{n-1|n}^{(x_{n-1}^\circ, x_n^\circ)}(x_n), x_n\Bigr\},$$

лежат на графике «большой» условной квантили

$$\Gamma^{(\mathbf{x}^\circ)}(x_2, \ldots, x_n) = \{q_{1|2\ldots n}^{(\mathbf{x}^\circ)}(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n\}.$$

Примеры распределений, обладающих воспроизводимостью условных квантилей, а также описание их вероятностных свойств можно найти в [1–3].

Введем обозначение $A_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для алгебраического дополнения элемента $\mathbf{e}_i$ матрицы, построенной на основе производных «малых» условных квантилей

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \ldots & \mathbf{e}_{n-1} & \mathbf{e}_n \\ d_{1|2} & 1 & d_{3|2} & \ldots & d_{n-1|2} & d_{n|2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{1|n} & d_{2|n} & d_{3|n} & \ldots & d_{n-1|n} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{где} \quad d_{i|j} := \frac{dq_{i|j}^{(x_i^\circ, x_j^\circ)}(x_j)}{dx_j}\bigg|_{x_i^\circ = x_i,\, x_j^\circ = x_j}.$$

Теорема 1. *Если для распределения вероятностей $F_{12\ldots n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (с положительной на $\mathbf{R}^n$ совместной плотностью) выполняется свойство воспроизводимости условных квантилей, то дифференциальное уравнение Пфаффа*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i = 0 \tag{2}$$

вполне интегрируемо (одним соотношением). Решением уравнения (2)*, проходящим через отмеченную точку* $\mathbf{x}^\circ$*, является «большая» условная квантиль* $x_1 = q^{(\mathbf{x}^\circ)}_{1|2\ldots n}(x_2, \ldots, x_n)$.

Для произвольных многомерных распределений, которые могут не обладать свойством воспроизводимости условных квантилей, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для распределения вероятностей* $F_{12\ldots n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *(с положительной на* $\mathbf{R}^n$ *совместной плотностью) кривые, параметризованные «малыми» условными квантилями* $\gamma_2^{(\mathbf{x}^\circ)}(t), \ldots, \gamma_n^{(\mathbf{x}^\circ)}(t)$, $t \in \mathbf{R}$*, являются интегральными кривыми дифференциального уравнения Пфаффа* (2)*, проходящими через отмеченную точку* $\mathbf{x}^\circ$.

В силу известной теоремы Фробениуса [4], [5], критерием полной интегрируемости уравнения Пфаффа (2) является выполнение равенства

$$d\omega \wedge \omega = 0. \tag{3}$$

В том случае, когда соотношение (3) не выполняется, для нахождения максимальной размерности интегральных многообразий уравнения (2), следуя известной теореме Дарбу [5], необходимо найти параметр r дифференциальной 1-формы ω:

$$(d\omega)^r \wedge \omega \neq 0, \quad \text{но} \quad (d\omega)^r \wedge \omega = 0.$$

Зная величину r, можно утверждать, что уравнение Пфаффа (2) не имеет интегральных многообразий размерности большей, чем $n - r - 1$.

Заметим, что для вполне интегрируемых уравнений Пфаффа (2) параметр r равен 0, поэтому для таких уравнений максимальная размерность интегральных многообразий равна $n-1$, что фактически и утверждается в теореме 1. Если параметр r дифференциальной 1-формы ω равен $n-1$, то максимальная размерность интегральных многообразий уравнения Пфаффа (2) равна 1. Примеры таких многообразий даны в теореме 2.

Наряду с введенным параметром r, в дифференциальной геометрии используют параметр $d = 2r + 1$ (класс Дарбу). Используя эту характеристику, можно провести классификацию многомерных распределений вероятностей $F_{12\ldots n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по классам Дарбу соответствующих дифференциальных 1-форм ω.

В докладе даны примеры многомерных распределений вероятностей, относящихся к различным классам Дарбу. Для распределений вероятностей, имеющих класс Дарбу, равный 1 (многомерное логистическое распределение, многомерное распределение Парето, многомерное распределение, задаваемое копулой Клейтона), в докладе приведены решения соответствующих вполне интегрируемых уравнений Пфаффа, которые являются «большими» условными квантилями этих распределений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шатских С. Я.* Об одном варианте преобразования независимости. — В сб.: Мера и интеграл. Самара: Самарский ун-т, 1995, с. 99–112.
2. *Шатских С. Я.* Преобразование независимости семейства случайных величин, обладающих воспроизводимостью условных квантилей. — Вестник СамГУ, естественнонаучная серия, 2002, № 2 (24), с. 107–119.
3. *Кнутова Е. М.* Сохранение свойства воспроизводимости при покоординатном преобразовании и дифференциальные уравнения для условных квантилей. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2001, т. 8, в. 2, с. 770–772.
4. *Шатских С. Я.* Необходимое условие воспроизводимости условных квантилей многомерных вероятностных распределений. — Изв. РАЕН, сер. МММИУ, 2000, т. 4, № 4, с. 67–72.
5. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.