Д. Е. Ефимов (Москва, ВЦ РАН). **Оценка нормы разности между частичными произведениями некоторых последовательностей вполне непрерывных операторов.**

Обозначим $L(H)$ множество ограниченных линейных операторов, определенных всюду в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть $\widetilde{A} = A_1, A_2, \ldots$ — последовательность операторов из $L(H)$. Будем называть $F_n(\widetilde{A}) = \prod_{k=1}^{n} A_k$ *частичным произведением последовательности ограниченных линейных операторов.*

Сингулярными числами оператора K называются неотрицательные квадратные корни собственных чисел оператора K^*K, где K^* — оператор, сопряженный к K. (Сингулярные числа всегда будем располагать в порядке невозрастания, с учетом кратности, см. [1]). Сингулярное число оператора K с номером i будем обозначать $\sigma_i(K)$.

Определенный всюду в H линейный оператор A называется *вполне непрерывным*, если он переводит всякое ограниченное множество точек во множество, компактное в смысле сильной сходимости (см. [2, с. 94]). Множество определенных всюду в H вполне непрерывных операторов будем обозначать H_∞.

Теорема 1. *Пусть $\widetilde{A} = A_1, A_2, \ldots$ и $\widetilde{A}' = A_1', A_2', \ldots$ — последовательности операторов из $L(H)$ и члены последовательностей обладают следующими свойствами:*

а) $A_i A_{i+1}' = A_i' A_{i+1} = A_i' A_{i+1}'$ *при любом* $i \in \mathbf{N}$;

б) $A_j - A_j' \in H_\infty$ *для любого* $j \in \mathbf{N}$ *и* $\sigma_i(A_j - A_j') \leqslant \alpha_i$ *для любых* $i, j \in \mathbf{N}$;

в) *для некоторого* $u > 0$ *ряд* $\sum_i \alpha_i^u$ *сходится.*

Обозначим $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ сингулярные числа оператора $F_n(\widetilde{A}) - F_n(\widetilde{A}')$.

Тогда оператор $(F_n(\widetilde{A}) - F_n(\widetilde{A}')) \in H_\infty$, ряд $\sum_i \gamma_i^u$ сходится и $\sum_i \gamma_i^u \leqslant \sum_i \alpha_i^{nu}$.

Пусть $A \in L(H)$, $\{f_k\}_1^\infty$ и $\{e_k\}_1^\infty$ — ортонормированные базисы в H. Если $\sum_{i,k} |(Af_k, e_i)|^2 < \infty$, то величину $N(A) = (\sum_{i,k} |(Af_k, e_i)|^2)^{1/2}$ называют *абсолютной нормой оператора A.*

Следствие. *Пусть $\widetilde{A} = A_1, A_2, \ldots$ и $\widetilde{A}' = A_1', A_2', \ldots$ — последовательности операторов из $L(H)$ и члены последовательностей обладают следующими свойствами:*

а) $A_i A_{i+1}' = A_i' A_{i+1} = A_i' A_{i+1}'$ *при любом* $i \in \mathbf{N}$;

б) $A_j - A_j' \in H_\infty$ *для любого* $j \in \mathbf{N}$ *и* $\sigma_i(A_j - A_j') \leqslant \lambda_i$ *для любых* $i, j \in \mathbf{N}$;

в) *ряд* $\sum_i \lambda_i^2$ *сходится.*

Тогда оператор $(F_n(\widetilde{A}) - F_n(\widetilde{A}')) \in H_\infty$ и $N(F_n(\widetilde{A}) - F_n(\widetilde{A}')) \leqslant (\sum_j \lambda_j^{2n})^{1/2}$.

Пользуясь методом, использованным при доказательстве теоремы 4 в [1], получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $\widetilde{A} = A_1, A_2, \ldots$ и $\widetilde{A}' = A_1', A_2', \ldots$ — последовательности операторов из $L(H)$ и члены последовательностей обладают следующими свойствами:*

а) $A_i A_{i+1}' = A_i' A_{i+1} = A_i' A_{i+1}'$ *при любом* $i \in \mathbf{N}$;

б) $A_j - A_j' \in H_\infty$ *для любого* $j \in \mathbf{N}$ *и* $\sigma_i(A_j - A_j') \leqslant \alpha_i$ *для дюбых* $i, j \in \mathbf{N}$;

в) *для некоторого* $u > 0$ *ряд* $\sum s_i \alpha_i^u$ *сходится.*

Обозначим $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ сингулярные числа оператора $F_n(\widetilde{A}) - F_n(\widetilde{A}')$.

Тогда ряд $\sum_i \gamma_i^{(u/n)}$ сходится и $\sum_i \gamma_i^{(u/n)} \leqslant \sum_i \alpha_i^u$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Horn A.* On the singular values of a product of completely continuous operators. — Proc. Nat. Acad. U.S.A., 1950, v. 36, № 7, p. 374–375.
2. *Ахизер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1966.