А. А. К у д р я в ц е в, **С. Я. Ш о р г и н** (Москва, ВМК МГУ, ИПИ РАН). **Байесовские модели массового обслуживания и надежности: постановка задачи и примеры.**

В работе, представленной данным докладом, приведены результаты, полученные авторами, начиная с 2005 года, в области применения байесовского подхода для решения некоторых задач теории массового обслуживания и теории надежности. В основе соответствующего метода лежит рандомизация характеристик систем массового обслуживания (СМО) относительно некоторых априорных распределений входных параметров. Данный подход может использоваться, в частности, для вычисления моментных и квантильных характеристик для вероятностно-временных и надежностных показателей больших групп систем или устройств.

Одним из направлений обобщения и усложнения постановок задач теории массового обслуживания является усложнение вероятностной структуры тех или иных входных параметров СМО; в частности, рассмотрение вместо традиционных входящих потоков — потоков Кокса, самоподобных потоков, марковских и полумарковских потоков и т. п.; аналогичные обобщения осуществляются и по отношению к распределениям времен обслуживания. В определенной степени эти обобщения могут интерпретироваться как результат рандомизации тех или иных параметров более «простых» потоков и распределений обслуживания. Так, процесс Кокса получается в результате специальной рандомизации интенсивности пуассоновского потока и т. п.

Все эти обобщенные современные постановки предполагают, что стохастический механизм рандомизации влияет на параметры системы непосредственно в период ее функционирования, т. е. мы изначально знаем, с какой системой имеем дело, пусть даже эта система достаточно сложна, и исследуем характеристики функционирования именно этой изначально фиксированной системы. Однако в реальной практике часты ситуации, при которых сама исследуемая система задана в определенном смысле неточно; скажем, если даже говорить о простейших системах типа $M|G|1$, то исследователю могут быть априори неизвестны параметр входящего потока λ и параметры обслуживания μ и σ^2. Такие ситуации возникают, скажем, в случае, когда рассматривается целый класс однотипных СМО, относительно которых известны только типы входящего потока и распределения обслуживания, а также дисциплина обслуживания, но конкретные параметры этих потоков и распределений, вообще говоря, различны для различных СМО данного класса. Исследователь априори не знает, с какой СМО из данного класса он имеет дело (это может иметь место, например, при исследовании серии однотипных устройств коммутации или передачи, выпускаемых одним и тем же производителем, для которых разброс значений тех или иных показателей обуславливается естественными технологическими вариациями при производстве; возможны и другие примеры). В этом случае, поскольку неизвестными являются именно исходные параметры потоков и времени обслуживания, естественным является рандомизационный подход, при котором элементами вероятностного пространства становятся (если рассматривать приведенный выше пример) значения λ, μ и σ^2 (а в общем случае можно говорить о вероятностном пространстве, элементами которого являются сами однотипные СМО). При этом подлежащие вычислению характеристики такой рандомизированной СМО, естественно, являются рандомизацией аналогичных характеристик «обычной» СМО аналогичного типа — с учетом того априорного распределения входных параметров СМО, которое взято исследователем за основу.

Таким образом, в том же примере с СМО типа $M|G|1$ возникают задачи рандомизации «обычных» характеристик таких систем с учетом априорных распределений входных параметров; скажем, может приниматься предположение о показательном, равномерном или каком-то другом распределении одной или нескольких из величин λ, μ и σ^2 (которые при таком подходе становятся случайными величинами), об их независимости или зависимости и т. п. Полученные результаты могут применяться, например, для вычисления средних значений, построения доверительных интервалов для тех или иных характеристик рассматриваемого класса СМО в целом. Такой подход к построению моделей массового обслуживания естественно назвать «байесовским». Впервые этот подход сформулирован в [1].

Другим направлением применения байесовского подхода является оценка надежности. Как известно [2], коэффициент готовности восстанавливаемого устройства в стационарном режиме может быть вычислен по формуле $k = \mu/(\lambda + \mu)$, где λ^{-1} — среднее время безотказной работы, μ^{-1} — среднее время восстановления. Если мы примем сформулированное выше предположение, в соответствии с которым любое изучаемое устройство выбирается случайным образом из некоторого множества сходных устройств, различающихся средними величинами показателей надежности, то в соответствии с приведенными выше рассуждениями значения λ и μ могут рассматриваться в качестве случайных. Следовательно, при таких предположениях коэффициент готовности k также является случайной величиной, и его распределение зависит от распределений величин λ и μ. Результаты, получаемые в рамках этой постановки, могут использоваться, в частности, для вычисления средних значений и построения доверительных интервалов для надежностных характеристик всей изучаемой группы устройств.

В докладе представлен краткий обзор статей [3–8], в которых авторы рассматривали вероятностные характеристики коэффициента загрузки ρ, вероятности потерь $1 - \pi$ (здесь π — вероятность того, что входящий в СМО вызов не будет потерян), коэффициента готовности k в системе $M|M|1|0$ и среднего числа заявок в системе $M|M|1|\infty$ в предположении о различных априорных распределениях параметров λ и μ.

Рассмотрим систему $M|M|1|0$. Предположим, что интенсивность входящего потока λ и интенсивность обслуживания μ независимы и имеют некоторые априори известные функции распределения $F_\lambda(x)$ и $F_\mu(x)$ соответственно. Первой задачей в рамках байесовского подхода к изучению систем массового обслуживания, естественно, является описание функций распределения коэффициента загрузки системы $\rho = \lambda/\mu$ и коэффициента готовности k. Поскольку значение $k = \mu/(\lambda + \mu)$ совпадает со значением вероятности не потерять вызов $\pi = 1/(1+\rho)$, мы можем рассматривать лишь одну из этих характеристик.

Вычисление функций распределения

$$F_\rho(x) = \int_0^\infty F_\lambda(xy)\, dF_\mu(y) \quad \text{и} \quad F_\pi(x) = 1 - F_\rho\left(\frac{1-x}{x} + 0\right)$$

дает возможность найти такие вероятностные характеристики ρ и π, как плотность, математическое ожидание, дисперсию и пр. Работы [3, 4, 6, 7] посвящены нахождению этих характеристик в различных предположениях об априорных распределениях исходных параметров λ и μ. В дальнейшем авторы предполагают продолжить расширение множества пар распределений, по которым производится рандомизация. В таблице отображены этапы рассмотрения предложенной задачи. Буквы D, M, R, E, P обозначают вырожденное, экспоненциальное, равномерное, Эрланга, Парето распределения соответственно; символ «$*$» относится к классической постановке задачи, символ «$+$» соответствует уже рассмотренным ранее распределениям, символом «$-$» обозначаются распределения, для которых авторы планируют получить аналогичные результаты в дальнейшем.

Таблица. Этапы рассмотрения задачи

$\lambda\backslash\mu$	D	M	R	E	P
D	$*$	$+$	$+$	$+$	$-$
M	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
R	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
E	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
P	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

Получаемые при данной постановке задачи выражения для моментов интересующих нас параметров системы зачастую являются достаточно громоздкими и не всегда представимы элементарными функциями. Однако доведение каждой из формул «до числа» не представляет ни малейшей сложности, о чем свидетельствует, в частности, написанный под руководством авторов программный пакет, предназначенный для вычисления значений вероятностных характеристик системы, при условии, что нам известны (оценены статистически или заданы техническими нормативами) значения параметров распределений λ и μ.

В качестве типичного примера выражений, получаемых для характеристик ρ и π, приведем один из результатов статьи [7]. Пусть $Ei(x)$ — интегральная показательная функция: $Ei(x) = -\int_{-x}^{\infty} e^{-t}t^{-1}\,dt$.

Теорема. *Пусть случайная величина λ имеет распределение Эрланга с параметрами $k \geqslant 1$ и $\theta > 0$, а случайная величина μ имеет вырожденное распределение. Тогда коэффициент загрузки ρ имеет распределение Эрланга с параметрами k и $\mu\theta$, а характеристики вероятности «непотери» вызова π определяются соотношениями*

$$f_\pi(x) = \frac{\mu^k\theta^k(1-x)^{k-1}e^{-\mu\theta(1-x)/x}}{(k-1)!\,x^{k+1}}, \qquad x \in (0,1),$$

$$\mathbf{E}\,\pi = \frac{(-1)^k\mu^k\theta^k}{(k-1)!}\left[e^{\mu\theta}Ei(-\mu\theta) + \sum_{n=1}^{k-1}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{\mu^n\theta^n}\right],$$

$$\mathbf{E}\,\pi^2 = \mu\theta - \mu\theta\eta\pi \quad (\textit{для } k=1),$$

$$\mathbf{E}\,\pi^2 = \frac{(-1)^k\mu^k\theta^k}{(k-2)!}\left[-e^{\mu\theta}Ei(-\mu\theta) + \sum_{n=1}^{k-2}\frac{(-1)^n(n-1)!}{\mu^n\theta^n}\right] - \mu\theta\mathbf{E}\,\pi \quad (\textit{для } k \geqslant 2).$$

Отдельный интерес для исследователя может представлять частный случай распределения Эрланга для интенсивности входящего потока λ, а именно, экспоненциальное распределение с параметром $\theta > 0$. Очевидно, что при этом предположении получаются следующие соотношения:

$$f_\rho(x) = \mu\theta e^{-\mu\theta x}, \qquad x > 0,$$

$$F_\pi(x) = e^{-\mu\theta(1-x)/x}, \quad f_\pi(x) = \frac{\mu\theta}{x^2}e^{-\mu\theta(1-x)/x}, \qquad x \in (0,1),$$

$$\mathbf{E}\,\pi = -\mu\theta e^{\mu\theta}Ei(-\mu\theta), \quad \mathbf{E}\,\pi^2 = \mu\theta + \mu^2\theta^2e^{\mu\theta}Ei(-\mu\theta).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 08–07–00152-а, 08–01–00567-а и 09–07–12032-офи-м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шоргин С. Я.* О байесовских моделях массового обслуживания. — В сб.: Тезисы докладов II-й Научной сессии ИПИ РАН. М.: ИПИ РАН, 2005, с. 120–121.
2. *Kozlov B. A.*, *Ushakov I. A.* Reliability Handbook. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1970.
3. *D'Apice C.*, *Manzo R.*, *Shorgin S.* Some Bayesian queueing and reliability models. — Electronic Journal «Reliability: Theory & Applications», 2006, v. 1, № 4.
4. *Кудрявцев А. А.*, *Шоргин С. Я.* Байесовский подход к анализу систем массового обслуживания и показателей надежности. — Информатика и ее примен., 2007, т. 1, в. 2, с. 76–82.
5. *Kudryavtsev A.*, *Shorgin S. Shorgin V.*, *Chentsov V.* Bayesian queueing and reliability models. — Systems and means of informatics: Spec. issue: Mathematical and computer modeling in applied problems. Moscow: IPI RAS, 2008, p. 40–53.
6. *Кудрявцев А. А.*, *Шоргин С. Я.* Байесовские модели массового обслуживания и надежности: экспоненциально-эрланговский случай. — Информатика и ее примен., 2009, т. 3, в. 1, с. 44–48.
7. *Кудрявцев А. А.*, *Шоргин В. С.*, *Шоргин С. Я.* Байесовские модели массового обслуживания и надежности: общий эрланговский случай. — Информатика и ее примен., 2009, т. 3, в. 4, с. 30–34.
8. *Кудрявцев А. А.*, *Шоргин С. Я.* Байесовские модели массового обслуживания и надежности: характеристики среднего числа заявок в системе $M|M|1|\infty$. — Информатика и ее примен., 2010, т. 4, в. 3. (В печати.)