В. И. А с т а ф ь е в (Самара, СГАУ)**. Автомодельные решения задач о развитии трещин гидроразрыва пласта.**

Рассмотрим вертикальную трещину гидроразрыва пласта (ГРП) в предположении плоской деформации (модель Христиановича–Гиртсма–ДеКлерка [1, 2]).Процесс развития трещины описывается следующими уравнениями для неизвестных функций —текущей длиной трещины $l(t)$, раскрытия трещины $w(x,t)$, распределения давления жидкости в трещине $p(x,t)$ и скорости потока жидкости в трещине $q(x,t)$:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial x}=-12\mu\frac{q}{w^3},\quad p(x,t)-p_0=-\frac{E}{2\pi(1-\nu^2)}\int_0^{l(t)}\frac{\partial w(s,t)}{\partial s}\frac{s\,ds}{s^2-x^2},\quad (1)$$

с начальным условием $w(x,0)=w_0(x)$, граничными условиями $q(0,t)=Q_0(t)/2$, $q(l(t),t)=0$ и критерием распространения трещины

$$\lim_{x\to l(t)}\frac{w(x,t)}{\sqrt{l(t)-x}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{4(1-\nu^2)}{E}K_{IC}.\quad (2)$$

Здесь μ — вязкость жидкости, E, ν и K_{IC} — упругие характеристики и трещиностойкость пласта, $Q(t)$ — расход жидкости, закачиваемой в трещину, p_0 — давление на трещине, вызванное удаленным полем напряжений.

Полное решение данной начально-краевой задачи может быть выполнено только численно [3]. Для случая полубесконечной трещины можно сформулировать автомодельную постановку задачи. Поместим начало координат в вершину трещины, а ось ξ направим вдоль трещины. В этом случае соотношения (1) примут следующий вид:

$$\frac{dq}{d\xi}=V\frac{dw}{d\xi},\quad \frac{dp}{d\xi}=12\mu\frac{q(\xi)}{w^3(\xi)},\quad p(\xi)-p_0=-\frac{E}{4\pi(1-\nu^2)}\int_0^{\infty}\frac{dw}{ds}\frac{ds}{s-\xi},\quad (3)$$

а критерий распространения трещины (2) запишется как $\lim_{\xi\to 0}w(\xi)/\sqrt{\xi}=\sqrt{2/\pi}4(1-\nu^2)K_{IC}/E$.

Приведем задачу (3) к безразмерному виду. Выберем в качестве масштаба длины величину $L=12\mu VE^2/p_0^3$, масштаба давлений величину $P=p_0$ и масштаба смещений величину $W=p_0L/E$. Тогда безразмерные функции $\Pi=(p-p_0)/P$ и $\Omega=w/W$ будут зависеть от безразмерной переменной $\widehat{\xi}=\xi/L$ следующим образом (штрих означает производную по ξ):

$$\Pi'=\Omega^{-2}(\xi),\quad (4)$$

$$\Pi(\xi)=1/(4\pi)\int_0^{\infty}\Omega'(\eta)(\xi-\eta)^{-1}\,d\eta,\quad (5)$$

$$\lim_{\xi\to 0}\Omega(\xi)/\sqrt{\xi}=k.\quad (6)$$

Таким образом, в безразмерном виде автомодельное решение $\Pi(\xi)$ и $\Omega(\xi)$ зависит лишь от одного автомодельного параметра — безразмерной трещиностойкости

$$k=\sqrt{8/(3\pi)}\sqrt{p_0/(\mu V)}K_{IC}/E.\quad (7)$$

Как видно из (7), величина k определяется комбинацией всех размерных параметров задачи K_{IC}, μV, E и p_0, т.е. учитывает в себе трещиностойкость и упругость пласта (K_{IC} и E), вязкость жидкости и скорость распространения трещины ГРП (μV), а также величину горного давления в пласте p_0. В [3] приведена следующая формула инверсии соотношения (5):

$$\Omega'(\xi)=\frac{k}{2\sqrt{\xi}}-\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{1/2}\frac{\Pi(\eta)}{\xi-\eta}\,d\eta.\quad (8)$$

Система (4), (8) с дополнительным условием (6) позволяет найти асимптотическое поведение решения при больших и малых значениях переменной ξ. Так, для $\Omega(\xi)$ при $\xi \to 0$ и при $\xi \to \infty$ можно записать, что $\Omega(\xi) = \Omega_0(\xi) + o\,(\xi^{1/2})$, $\Omega(\xi) = \Omega_\infty(\xi) + o\,(\xi^{2/3})$, где $\Omega_0(\xi) = k\sqrt{\xi}$, $\Omega_\infty = c\xi^{2/3}$, $c = (18\sqrt{3})^{1/3}$. Из последних соотношений можно записать приближенное представление для функции $\Omega(\xi)$ во всем диапазоне изменения переменной ξ: $\widetilde{\Omega} = k\sqrt{\xi} + c\xi^{2/3}$. Функция Π, соответствующая этому представлению, находится из (4):

$$\widetilde{\Pi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{d\eta}{k^2\eta(1+\alpha\eta^{1/6})^2} = \frac{6}{k^2}\left(\ln\frac{\alpha t}{\alpha t+1} + \frac{1}{\alpha t+1}\right), \quad \alpha = c/k, \quad \xi = t^6.$$

Для нахождения промежуточной асимптотики решения при $0 < \xi < \infty$ будем искать решение $\Pi(\xi)$ и $\Omega(\xi)$ при $\xi \to 0$ в виде двучленного представления: $\Omega(\xi) = k\sqrt{\xi} + \Omega_1(\xi)$, $\Pi(\xi) = (1/k^2)\ln\xi + \Pi_1(\xi)$. Подставляя эти двучленные представления в основные уравнения (4) и (8), для функций $\Omega_1(\xi)$ и $\Pi_1(\xi)$ получаем уравнения

$$\frac{d\Pi_1}{d\xi} = -\frac{2\Omega_1(\xi)}{k\sqrt{\xi}}, \quad \frac{d\Omega_1}{d\xi} = -\frac{4}{\pi k^2}\int_0^\infty \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\,\frac{\ln\eta + k^2\Pi_1(\eta)}{\xi - \eta}\,d\eta. \tag{9}$$

Из уравнений (9) следуют промежуточные асимптотики для функций $\Omega_1(\xi) = a\xi$ и $\Pi_1(\xi) = -4a\sqrt{\xi}/k^3$, где $a = 4\pi/k^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Желтов Ю. П.*, *Христианович С. А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. — Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 5, с. 3–41.
2. *Geertsma J.*, *Klerk F. De.* A rapid method of predicting width and extent of hydraulic induced fractures. — J. Petr. Techn., 1969, v. 21, № 12, p. 1571–1581.
3. *Garagash D.*, *Detournay E.* The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium. — J. Appl. Mech., 2000, v. 67, p. 183–192.