А. Р. Симонян, Р. А. Симонян, Е. И. Улитина (Сочи, СГУТиКД, Краснодар, КубГУ). **Простейшая многоканальная система массового обслуживания с монотонными интенсивностями обслуживания и с ожиданием.**

Одной из первых систем массового обслуживания, позволивших свое изучение методами процессов размножения и гибели [1], является система $M|M|m|\infty$, что по терминологии Кендалла–Башарина [1] означает: в m-канальную систему массового обслуживания с ожиданием поступает пуассоновский поток вызовов с параметром $\lambda > 0$, а длительности обслуживания вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и имеют экспоненциальную функцию распределения $1-e^{-\mu t}$, $\mu > 0$, $t > 0$. В момент $t = 0$ система свободна от вызовов.

Поступивший первый вызов немедленно начинает свое обслуживание. Следующий поступивший вызов начинает обслуживание следующим прибором и так далее. Когда в момент поступления вызовов все приборы заняты, то поступившие вызовы становятся в очередь и ждут своего обслуживания в порядке поступления (FIFO).

Анализ такой системы — ее основных характеристик (длина очереди, время ожидания) — содержится во многих работах по теории массового обслуживания. Отметим монографии Б. В. Гнеденко и И. Н. Коваленко [1], Г. П. Климова [2], Т. Л. Саати [3] и др.

Рассмотрим систему $M|M|{\downarrow}m|\infty$, которая от исходной системы отличается тем, что каждый прибор (канал) нумеруется и прибор с номером k ($k = 1, 2, \dots, m$) (имеет свою интенсивность $\mu_k > 0$ обслуживания вызовов. Предполагается, без ограничения общности, что интенсивность обслуживания монотонно неубывающая: $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \dots \leqslant \mu_m$. Данная система называется *простейшей многоканальной моделью с монотонными интенсивностями и с ожиданием.*

Обозначим $P_k(t)$ вероятность того, что в момент t в системе находятся k вызовов, $k = 1, 2, \dots, m$. Нас интересуют стационарные вероятности $p_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$. Существование этих пределов следует из теоремы Феллера [4].

Основной результат работы формулируется следующим образом.

Теорема 1. *В модели $M|M|{\downarrow}m|\infty$ при $\rho < 1$ для вероятностей p_k, $k = 1, 2, \dots, m$, имеет место формула*

$$p_k = \begin{cases} \prod_{i=0}^{k} \rho_i p_0, & \text{при } 1 \leqslant k < m, \\ \rho^{k-m} \prod_{i=0}^{m} \rho_i p_0, & \text{при } k \geqslant m, \end{cases}$$

где $p_0 = (\sum_{k=0}^{m} \prod_{i=0}^{k} \rho_i + \rho(1-\rho)^{-1} \prod_{i=0}^{m} \rho_i)^{-1}$, $\rho_0 = 1$, $\rho_k = \lambda/\overline{\mu}_k$, $\overline{\mu}_k = \sum_{i=1}^{k} \mu_i$, $k = 1, 2, \dots, m$, $\rho = \rho_m$.

Пусть L_{sr} — средняя длина очереди в системе, т. е. среднее число вызовов в очереди. Тогда в условиях теоремы 1 имеет место следующая формула: $L_{sr} = \rho(1-\rho)^{-2} \prod_{i=0}^{m} \rho_i$.

Таким образом, для модели $M|M|{\downarrow}m|\infty$ получены условие стационарности, распределение длины очереди и выведена формула вычисления средней длины очереди.

Обозначим π вероятность того, что все приборы будут заняты в какой-то случайно взятый момент времени, тогда очевидно, что $\pi = \sum_{k=m}^{\infty} p_k = (1-\rho)^{-1} p_0 \prod_{i=0}^{m} \rho_i$.

Основной характеристикой качества обслуживания является длительность ожидания начала обслуживания вызова — время ожидания. Время ожидания является случайной величиной, которую обозначим w. Пусть теперь $W(t) = \mathbf{P}\{w \leqslant t\}$ — функция распределения времени ожидания. Для $W(t)$ имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *В модели $M|M|{\downarrow}m|\infty$ при $\rho < 1$ для $W(t)$ имеет место формула*

$$W(t) = \begin{cases} 1 - \pi e^{-\lambda(1/\rho - 1)t}, & \text{при } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б. В.*, *Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987, 336 с.
2. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966, 243 с.
3. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее применения. М.: Советское радио, 1965, 520 с.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984, т. 2, 751 с.