О. Б. Зайцева (Армавир, АГПА). **Анализ безопасности функционирования технических систем.**

В работе, представленной данным докладом, исследованы математические модели безопасности функционирования различных систем, которые описывают процессы, связанные с охраной объектов (территории, информации) и другими подобными ситуациями.

В описываемой схеме рассматриваются внешние воздействия (попытки несанкционированного доступа) и эволюция системы защиты, которая призвана парировать возникающие угрозы, связанные с этими воздействиями. Система защиты может находиться в различных состояниях, от которых зависит качество ее функционирования, т. е. качество парирования угроз.

Теоретической основой исследования является управляемый полумарковский процесс с катастрофами [1].

Попытки пройти систему защиты осуществляются периодически. Предполагаем, что этот процесс описывается процессом Пуассона с параметром λ.

Эволюцию системы описывает модель функционирования элемента с произвольной длительностью самостоятельного проявления отказа [2]. Сохраняя принятые обозначения, исследуем полумарковский процесс $\xi(t)$, описывающий эволюцию системы. Процесс принимает значения $E = \{0, 1, 2, 3\}$ в зависимости от того, каков вид восстановления реализуется или система работает.

Построение полумарковского ядра. Для исследуемой модели марковскими моментами являются моменты начала и окончания восстановительных работ.

Множество управлений U_0 совпадает с множеством положительных чисел, $U_0 = [0, \infty)$. Из описания процесса функционирования системы следует, что управление осуществляется только в состоянии $\xi(t) = 0$, когда система работает и назначаются сроки проведения плановой предупредительной профилактики.

Из описания процесса функционирования системы следует, что при $i = 1, 2, 3$ справедливы равенства $Q_{i0}(t, u) = \mathbf{P}\{\gamma_i < t\} = F_i(t)$, $Q_{ij}(t, u) = 0$, $j = 1, 2, 3$, где $F_i(t)$ — функции распределения времен восстановления.

При $i = 0$ справедливы следующие равенства. При $u > t$: $Q_{01}(t, u) = Q_{02}(t, u) = 0$, $Q_{03}(t, u) = \int_0^t \Phi(t - x)\, dF(x)$, а при $u \leqslant t$: $Q_{01}(t, u) = \overline{F}(u)$, $Q_{02}(t, u) = \int_0^u \overline{\Phi}(u - x)\, dF(x)$, $Q_{03}(t, u) = \int_0^u \Phi(u - x)\, dF(x)$. Здесь $F(x)$ — функция распределения времени до отказа, $\Phi(x)$ — функция распределения времени проявления отказа, $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, $\overline{\Phi}(x) = 1 - \Phi(x)$. Переходные вероятности вложенной цепи Маркова имеют вид

$$p_{00} = 0, \quad p_{01} = \int_0^\infty \overline{F}(u)\, dG(u), \quad p_{02} = \int_0^\infty \int_0^u \overline{\Phi}(u - x)]\, dF(x)\, dG(u),$$

$$p_{03} = \int_0^\infty \int_0^u \Phi(u - x)\, dF(x)\, dG(u), \quad p_{i0} = 1, \quad p_{ij} = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Распределение моментов катастроф. Для распределения момента катастрофы $F_{ij}(t, x, u)$ при условии, что процесс пребывает в состоянии i, перешел в состояние j за время t и было принято решение u, имеем

$$F_{i0}(t, x, u) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad F_{01}(t, x, u) = \begin{cases} 0, & x \leqslant t, \\ 1 - e^{-\lambda(x-t)}, & x \geqslant t, \end{cases}$$

$$F_{02}(t, x, u) = \int_0^{\min\{x,u\}} (1 - e^{-\lambda(x-y)})\overline{\Phi}(u - y)\, dF(y) \Big/ \int_0^u \overline{\Phi}(u - y)\, dF(y),$$

$$F_{03}(t, x, u) = \int_0^{\min\{x,t\}} (1 - e^{-\lambda(x-y)})\, d_t\Phi(t - y)\, dF(y) \Big/ \int_0^t d_t\Phi(t - y)\, dF(y).$$

Теорема. *Математическое ожидание момента катастрофы есть дробно-линейный функционал относительно меры $G(u)$.*

Для математического ожидания момента катастрофы $M_i = M(\tau_1|\xi(0) = i)$, используя формулу полного математического ожидания, получаем систему

$$M_0 = \sum_{j\in E} \int_{u\in U_i} \int_0^\infty \left[\int_0^t x \, d_x F_{0j}(t,x,u) + \int_t^\infty (t+M_j) \, d_x F_{0j}(t,x,u) \right] d_t Q_{0j}(t,u) G(du),$$

$$M_i = M_0 + \int_0^\infty \left[\int_0^t x \, d_x F_{i0}(t,x) + \int_t^\infty t \, d_x F_{i0}(t,x) \right] dQ_{i0}(t), \quad i = 1,2,3.$$

Первый столбец матрицы этой неоднородной линейной системы алгебраических уравнений и первый элемент столбца свободных членов суть линейные функционалы относительно распределения $G(x)$, которое определяет марковскую однородную рандомизированную стратегию управления. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Известно [3], что в этом случае оптимальную стратегию управления можно искать в классе детерминированных стратегий $G(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant u \\ 1, & x > u. \end{cases}$ Поэтому выпишем решение системы для детерминированной стратегии и получим решение как отношение двух определителей

$$\Delta(u) = 1 - \overline{F}(u) \int_0^\infty e^{-\lambda t} \, dF_1(t) - \int_0^u e^{-\lambda(u-y)} \overline{\Phi}(u-y) \, dF(y)$$
$$\times \int_0^\infty e^{-\lambda t} \, dF_2(t) - \int_0 u e^{-\lambda x} F(u-x) \, d\Phi(x) \int_0^\infty e^{-\lambda t} \, dF_3(t),$$

$$\Delta_0(u) = u\overline{F}(u) + \int_0^u \left(y + \frac{1-e^{-\lambda(u-y)}}{\lambda} \right) \overline{\Phi}(u-y) \, dF(y)$$
$$+ \int_0^u y\Phi(u-y) \, dF(y) + \int_0^u \frac{1-e^{-\lambda z}}{\lambda} F(u-z) \, d\Phi(x)$$
$$+ \overline{F}(u) \int_0^\infty e^{-\lambda t} (1 - F_1(t)) \, dt$$
$$+ \int_0^\infty e^{-\lambda t} (1 - F_2(t)) \, dt \int_0^u e^{-\lambda(u-y)} \overline{\Phi}(u-y) \, dF(y)$$
$$+ \int_0^\infty e^{-\lambda t} (1 - F_3(t)) \, dt \int_0^u e^{-\lambda x} F(u-x) \, d\Phi(x).$$

Отношение этих определителей $M_0(u) = \Delta_0(u)/\Delta(u)$ определяет математическое о-жидание времени до катастрофы при условии, что процесс стартует из состояния $i = 0$ и предупредительные профилактики назначаются через время u.

Математическая задача сводится к определению максимума функции $M_0(u)$ и точки u_0, в которой этот максимум достигается, $M_0(u_0) = \max_{u\geqslant 0}[\Delta_0(u)/\Delta(u)] = \Delta_0(u_0)/\Delta(u_0)$.

В ы в о д. Нужно назначать проведение предупредительных профилактик через время u_0 и получим максимальное математическое ожидание времени до катастрофы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каштанов В.А.*, *Янишевский И.М.* Исследование функционалов на траекториях полумарковского процесса с конечным множеством состояний. — Кибернетика и системный анализ, 1998, № 1, с. 145–156.
2. *Каштанов В. А.*, *Медведев А. И.* Теория надежности сложных систем. М.: Физматлит, 2010, 608 с.
3. *Барзилович Е. Ю.*, *Беляев Ю. К.*, *Каштанов В. А. и др.* Вопросы математической теории надежности /Под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983, 376 с.
4. *Зайцева О. Б.* Исследование вероятностных характеристик системы защиты. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 4, с. 553–554.
5. *Зайцева О.Б.* Построение оптимальной стратегии управления в полумарковской модели безопасности. — Надежность, 2011, № 1 (36).