Г. И. Белявский, Н. Д. Никоненко (Ростов-на-Дону, ЮФУ). **Об алгоритме вычисления минимальной мартингальной меры и глобального риска.**

В [1] вводится определение невырожденности процесса с дискретным временем. Процесс S является *невырожденным*, если выполняется одно из эквивалентных условий:

$$\lambda_n \Delta A_n \leqslant \delta \quad P - \text{п. н. для } n = 1, 2, \ldots, n, \quad \delta \in (0, 1);$$

$$\text{процесс } \widehat{K} \quad P\text{-п. н. ограничен по } \omega \text{ и } j; \tag{1}$$

$$\mathbf{E}(\Delta M_n^2 | F_{n-1}) \geqslant (1 - \delta)\mathbf{E}(\Delta S_n^2 | F_{n-1}) \quad P - \text{п. н. для} \quad n = 1, 2, \ldots, N, \quad \delta \in (0, 1);$$

$$\frac{(\mathbf{E}(\Delta S_l \mid F_{l-1}))^2}{\mathrm{Var}(\Delta S_l \mid F_{l-1})} \quad P - \text{п. н. ограничен по } \omega \text{ и } l.$$

В приведенном определении $\widehat{K} = (\widehat{K}_j)_{j=1,2,\ldots,N}$ — процесс среднеквадратичной замены для процесса S [1]:

$$\widehat{K}_j = \sum_{l=1}^{j} \frac{(\mathbf{E}(\Delta S_l \mid F_{l-1}))^2}{\mathrm{Var}(\Delta S_l \mid F_{l-1})}.$$

Процесс $M = (M_j)_{j=0,1,\ldots,N}$ — мартингал, $A = (A_j)_{j=0,1,\ldots,N}$ — предсказуемый процесс из разложения Дуба процесса S, $\lambda_n := \Delta A_n / \mathbf{E}(\Delta S_n^2 \mid F_{n-1})$.

Рассмотрим процесс $(S_n)_{n=0}^N$ — дискретизированный экспоненциальный процесс Леви:

$$S_n = S_{n-1} e^{h_n}, \quad h_n = \mu + \sigma \varepsilon_n, \tag{2}$$

где в (1) ε_n— независимые и одинаково распределенные по закону Пуассона случайные величины, т. е. $p\{\varepsilon_n = k\} = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$.

Для процесса, заданного (2), процесс $\widehat{K}$ имеет вид

$$\widehat{K}_j = \sum_{l=1}^{j} \frac{(e^{\mu - \lambda(1-e^{\sigma})} - 1)^2}{e^{2\mu}\bigl(e^{\lambda(e^{2\sigma}-1)} - e^{2\lambda(e^{\sigma}-1)}\bigr)} = \frac{j(e^{\mu - \lambda(1-e^{\sigma})} - 1)^2}{e^{2\mu}\bigl(e^{\lambda(e^{2\sigma}-1)} - e^{2\lambda(e^{\sigma}-1)}\bigr)},$$

поэтому процесс среднеквадратичной замены является детерминированным. Следовательно, процесс $(\lambda_n \Delta A_n)_{n=1,2,\ldots,N}$ также является детерминированным:

$$\lambda_n \Delta A_n = \frac{e^{2\mu - 2\lambda(1-e^{\sigma})} - 2e^{\mu - \lambda(1-e^{\sigma})} + 1}{e^{2\mu - \lambda(1-e^{2\sigma})} - 2e^{\mu - \lambda(1-e^{\sigma})} + 1}.$$

Итак, для рассматриваемой модели справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Процесс S является невырожденным, если выполняется условие*

$$\delta \geqslant \frac{(e^{\mu - \lambda(1-e^{\sigma})} - 1)^2}{e^{2\mu - \lambda(1-e^{2\sigma})} - 2e^{\mu - \lambda(1-e^{\sigma})} + 1}, \qquad \delta \in (0, 1). \tag{3}$$

Теорема 2 [1]. *Если выполняется условие* (3), *то существует предсказуемая последовательность* $\{\gamma_n\}$, *которая является решением задачи*

$$E_P\biggl(f_N - X_0 - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \Delta S_i\biggr)^2 \to \min_{\{\gamma_n\}}.$$

В данном случае минимальная мартингальная мера, которая участвует в вычислении оптимальной стратегии, находится следующим образом:

$$\frac{d\widehat{P}}{dP} = \widehat{Z}_n = \prod_{j=1}^{N} \frac{1 - \lambda_j \Delta S_j}{1 - \lambda_j \Delta A_j} = \prod_{j=1}^{N} (W e^{\mu + \sigma \varepsilon_j} + V),$$

$$V = \frac{e^{\mu-\lambda(1-e^{\sigma})} - e^{2\mu-\lambda(1-e^{2\sigma})}}{e^{2\mu-\lambda(1-e^{2\sigma})} - e^{2\mu-2\lambda(1-e^{\sigma})}}, \quad W = \frac{e^{\mu-\lambda(1-e^{\sigma})} - 1}{e^{2\mu-\lambda(1-e^{2\sigma})} - e^{2\mu-2\lambda(1-e^{\sigma})}}.$$

При выполнении условия (3) величина $\widehat{Z}$ является квадратично интегрируемым (P, F)-мартингалом. Минимальная мартингальная мера совпадает с квадратично оптимальной обобщенной мартингальной мерой, так как процесс среднеквадратичной замены является детерминированным [1].

Если процесс S интерпретировать как процесс цены рискового актива, то оптимальная стратегия является среднеквадратичным хеджем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schweizer M.* Variance-Optimal Hedging in Discrete Time. — Mathematics of Operations Research, 1995, v. 20, p. 1–32.