

**И. С. Морозов** (Москва, МГУ). **О характеристическом свойстве степенных, экспоненциальных и логарифмических функций полезности.**

В литературе задача оптимального инвестирования на финансовом рынке часто рассматривается с точки зрения максимизации ожидаемой полезности от капитала инвестора в заключительный момент времени. В стандартном случае будущее состояние рынка описывается единственной вероятностной мерой  $\mathbf{P}$ . В этом предположении исчерпывающее исследование многих аспектов задачи было проведено Д. Крамковым и В. Шахермайером в [1, 2, 3], где, в частности, было доказано, что при дифференцируемой функции полезности  $U$  целевая функция  $u$  будет также дифференцируемой.

В действительности выбор вероятностной меры  $\mathbf{P}$ , описывающей будущее состояние рынка, может сам являться элементом неопределенности. Возможным подходом к рассмотрению подобного рода рисков может служить оптимизация наихудшего сценария. При самых общих предположениях такая задача рассматривалась в недавних работах [4, 5]. Если будущие сценарии рынка с точки зрения инвестора описываются множеством  $\mathcal{Q}$  субъективных мер, то задача максимизации робастной полезности при начальном капитале  $x$  может быть поставлена в виде  $u(x) := \sup_{k \in \mathcal{K}} \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q U(x + k)$ , где множество случайных величин  $\mathcal{K}$  трактуется как множество допустимых на финансовом рынке доходов.

Целевая функция  $u$  позволяет оценить возможности финансового рынка и поэтому сама может рассматриваться как функция полезности. Но помимо возрастания и вогнутости традиционным с экономической точки зрения условием на функцию полезности является дифференцируемость. Поэтому при исследовании максимизации полезности встает вопрос о дифференцируемости целевой функции  $u$ .

Отличие робастного случая от стандартного заключается в том, что даже при дифференцируемой функции полезности  $U$  целевая функция  $u$  может быть не всюду дифференцируемой. В то же время для степенных, экспоненциальных и логарифмических функций полезности  $U$  вопрос о дифференцируемости целевой функции  $u$  в задаче максимизации робастной полезности решается положительно при весьма общих предположениях.

Основная цель данной работы состоит в доказательстве того, что для любой другой функции полезности, не из перечисленных выше классов, всегда найдется простая модель рынка, для которой функция ожидаемой полезности  $u$  не будет всюду дифференцируемой. А именно, такая ситуация может быть реализована в одношаговой модели рынка с двумя рисковыми активами на конечном вероятностном пространстве, состоящем из четырех элементарных исходов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kramkov D., Schachermayer W.* The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. — *Ann. Appl. Probab.*, 1999, v. 9, № 3, p. 904–950.
2. *Kramkov D., Schachermayer W.* Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. — *Ann. Appl. Probab.*, 2003, v. 13, № 4, p. 1504–1516.
3. *Schachermayer W.* Optimal investment in incomplete markets when wealth may become negative. — *Ann. Appl. Probab.*, 2001, v. 11, № 3, p. 694–734.
4. *Гущин А.А.* Двойственная характеристика цены в задаче максимизации робастной полезности. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, т. 55, в. 4, с. 680–704.
5. *Морозов И.С.* Расширение класса допустимых стратегий в задаче максимизации робастной полезности с конечной на  $\mathbf{R}$  функцией полезности. — *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 2010, т. 17, в. 5, с. 617–635.