В. А. Ивницкий (Москва, МГУПС)**. Нахождение нестационарных начальных моментов произвольного порядка количества требований в системе массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком.**

В работе, представленной данным докладом, находятся нестационарные начальные моменты количества требований в системе массового обслуживания (СМО) с рекуррентным входящим потоком методом стохастических разностных уравнений [1]. Обозначим $H(t)$ функцию восстановления, т.е. математическое ожидание количества требований рекуррентного потока, поступивших до момента t.

Пусть в СМО поступает рекуррентный поток требований, т. е. на оси времени последовательно расположены случайные точки $t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots$, так, что с вероятностью 1: $t_n \geqslant t_{n-1}$, $n \geqslant 1$, $t_0 \geqslant 0$. В каждую из точек $t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots$ поступает одно требование. Случайные величины $z_0 = t_0$, $z_1 = t_1 - t_0, \ldots, z_n = t_n - t_{n-1}, \ldots$ являются независимыми неотрицательными случайными величинами, причем $\mathbf{P}\{z_0 < x\} = \varphi^0(x)$, а $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ одинаково распределены и их функция распределения имеет произвольный вид $\mathbf{P}\{z_i < x\} = F(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Длительность обслуживания в СМО имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. В СМО имеется бесконечное число каналов. После завершения обслуживания в СМО требование уходит из СМО. Обозначим $\nu(t)$ число требований в СМО в момент t. Необходимо найти начальные моменты произвольного порядка процесса $\nu(t)$. Процесс $\nu(t)$ — это немарковский процесс. Для того чтобы он стал марковским, необходимо ввести дополнительную переменную $\xi(t)$ — длительность интервала времени с момента t до момента поступления следующего требования.

Введем случайный процесс $\zeta(t) = \{\nu(t), \xi(t)\}$, который является марковским. Обозначим $\nu(t,x)$ количество требований в СМО в момент t с условием, что $\xi(t) < x$, т. е. $\nu(t,x) = \nu(t) I\{\xi(t) < x\}$. Процесс $\nu(t,x)$ также является марковским случайным процессом. Обозначим $n^{(k)}(t,x) = \mathbf{M}\,\nu(t,x)^k = \mathbf{M}\,\nu(t)^k I\{\xi(t) < x\}$, $n^{(k)}(t) = n^{(k)}(t,\infty) = \mathbf{M}\,\nu(t)^k$, $H(t) = \mathbf{M}\,\nu(t)$.

Теорема 1. *Для того чтобы функция* $n^{(k)}(t,x)$ *для* СМО *с рекуррентным входящим потоком определялась следующим линейным дифференциальным уравнением в частных производных*

$$\frac{\partial}{\partial t} n^{(k)}(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} n^{(k)}(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x} n^{(k)}(t,0)(1 - F(x)) + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i \frac{\partial}{\partial x} n^{(i)}(t,0) F(x) - k\mu n^{(k)}(t,x) + \mu \sum_{i=1}^{k-1} C_k^{i-1} (-1)^{k-i+1} n^{(i)}(t,x)$$

с начальным условием $n^{(k)}(0,x) = n^{(k)}(0)\varphi^{(0)}(x)$, *где* $n^{(k)}(0) = \mathbf{M}\,\nu(0)^k$, *необходимо и достаточно выполнения условий*:

1) *времена обслуживания должны быть взаимно независимыми и иметь экспоненциальные распределения с одним и тем же параметром, который не должен зависеть от состояния* СМО;

2) *в* СМО *должно быть бесконечное число каналов обслуживания*;

3) *распределение интервала времени между последовательно поступающими требованиями не должно зависеть от состояния* СМО.

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{n}^{(k)}(u,s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ut-sx}\, d_x n^{(k)}(t,x), \quad \widetilde{n}^{(k)}(u) = \int_0^\infty e^{-ut} n^{(k)}(t)\, dt,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \widetilde{n}^{(k)}(u,0) = \int_0^\infty e^{-ut} \frac{\partial}{\partial x} n^{(k)}(t,0)\, dt, \quad \widetilde{\varphi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x),$$

$$\widetilde{\varphi}^{(0)}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d\varphi^{(0)}(x), \quad \widetilde{h}(u) = \int_0^\infty e^{-ut}\, dH(t).$$

Теорема 2. *Преобразование Лапласа начального момента k-го порядка количества требований в* СМО *определяется следующей рекуррентной формулой*:

$$\widetilde{n}^{(k)}(u)(u+k\mu)=\sum_{i=0}^{k-1}C_k^i\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{n}^{(i)}(u,0)+\mu\sum_{i=1}^{k-1}C_k^{i-1}(-1)^{k-i+1}\widetilde{n}^{(i)}(u)+\mathbf{M}\,\nu(0)^k,$$

где $(\partial/\partial x)\widetilde{n}^{(i)}(u,0)$ *определяется также рекуррентными формулами*

$$\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{n}^{(i)}(u,0)=(1-\widetilde{\varphi}(u+i\mu))^{-1}\Bigg(\sum_{l=0}^{i-1}C_i^l\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{n}^{(i)}(u,0)\,\widetilde{\varphi}(u+i\mu)+\mu\sum_{l=1}^{i-1}C_i^{l-1}(-1)^{i-l+1}$$

$$\times\,\widetilde{n}^{(i)}(u,u+i\mu)+\mathbf{M}\,\nu(0)^i\,\widetilde{\varphi}^{(0)}(u+i\mu),\quad \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{n}^{(0)}(u,0)=(1-\varphi(u))^{-1}\,\widetilde{\varphi}^{(0)}(u)=\widetilde{h}(u),$$

$$(j-i)\mu\widetilde{n}^{(i)}(u,u+i\mu)=\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{n}^{(i)}(u,0)(1-\widetilde{\varphi}(u+j\mu))-\sum_{l=0}^{i-1}C_i^l\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{n}^{(l)}(u,0)\,\widetilde{\varphi}(u+j\mu))$$

$$-\,\mu\sum_{l=1}^{i-1}C_i^{l-1}(-1)^{i-l+1}\widetilde{n}^{(l)}(u,u+j\mu)-n^{(i)}(0)\,\widetilde{\varphi}^{(0)}(u+j\mu),$$

$$j\mu\widetilde{n}^{(0)}(u,u+j\mu)=\lambda(1-\widetilde{\varphi}(u+j\mu)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивницкий В. А.* Определение корреляционных функций количества требований в узлах замкнутой сети массового обслуживания с возможностью обхода узлов требованиями. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 5, с. 856–857.