Н. В. Данилова (Ростов-на-Дону, ЮФУ). **Расчет справедливой цены стандартного опциона-колл с последействием и азиатского арифметического опциона-колл для модели (B,S)-рынка со случайным переключением параметров.**

Рассмотрим модель, представленную следующими стохастическими разностными уравнениями [1]:

$$\Delta S_n = S_{n-1}(r_n + \sigma_n \varepsilon_n), \quad \Delta B_n = B_{n-1} r_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \widehat{N}. \tag{1}$$

Заданы начальные условия: $B_n|_{n=0} = B_0$, $S_n|_{n=0} = S_0$. Считаем, что случайные величины (с.в.) $\sigma_n > 0$, r_n предсказуемы. В данном случае $\varepsilon_n \in \{0,1\}$ — независимые с. в., причем $\mathbf{P}\{\varepsilon_n = 1\} = \mathbf{P}\{\varepsilon_n = -1\}$. Рассматривается естественная фильтрация $F_0 = \sigma(\Omega, \varnothing)$, $F_n = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$.

Пусть необходимо решить следующую задачу: найти $\min_\gamma \widehat{X}_0$ при ограничениях $\Delta(\widehat{X}_N/B_n) = \gamma_n \Delta(S_n/B_N)$, $\widehat{X}_{\widehat{N}} \geqslant f_{\widehat{N}}$, где $\widehat{X}$ — адаптированный процесс, γ — предсказуемый процесс относительно фильтрации F.

Рассмотрим последовательность таких марковских моментов остановки $0 = \tau_0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \cdots \leqslant \tau_N \leqslant \widehat{N}$, что $\tau_1 = \inf_{0\leqslant i \leqslant \widehat{N}}\{S_i \geqslant M_1(i)\}$, $\tau_2 = \inf_{0\leqslant i \leqslant \widehat{N}}\{S_i \leqslant M_0(i)\}$, и так далее до τ_N.

Параметры модели (1) имеют вид

$$\sigma_n = \widehat{\sigma}_1 I\{\tau_i \leqslant n-1 < \tau_{i+1},\ i \text{ — четное}\} + \widehat{\sigma}_2 I\{\tau_i \leqslant n-1 < \tau_{i+1},\ i \text{ —нечетное}\},$$

$$r_n = \widehat{r}_1 I\{\tau_i \leqslant n-1 < \tau_{i+1},\ i \text{ — четное}\} + \widehat{r}_2 I\{\tau_i \leqslant n-1 < \tau_{i+1},\ i \text{ —нечетное}\},$$

$n = 1, 2, \ldots, \widehat{N}$, $i = 0, 1, \ldots, N$, где $\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \widehat{r}_1, \widehat{r}_2$ — константы.

Теорема [1]. *Пусть* $\widehat{X}_{\widehat{N}} = f_{\widehat{N}}(S_{\widehat{N}}) = g_{\widehat{N}}(S_{\widehat{N}})$. *Тогда справедлива следующая формула*:

$$\widehat{X}_{n-1} = g_{n-1}(S_{n-1}) = \frac{1}{2(1+\widehat{r}_j)}\Big(g_n(S_{n-1}(1+\widehat{r}_j+\widehat{\sigma}_j)) + g_n(S_{n-1}(1+\widehat{r}_j-\widehat{\sigma}_j)\Big),$$

$\tau_i \leqslant n-1 < \tau_{i+1}$, $j = 1$, *если* i *— четное*, $j = 2$ *для нечетных* i ($n = 1, 2, \ldots, \widehat{N}$, $i = 0, 1, \ldots, N$).

В качестве финансового обязательства рассмотрим стандартный опцион-колл с последействием [2]: $f_{\widehat{N}} = (S_{\widehat{N}} - K_{\widehat{N}})^+$, где $K_{\widehat{N}} = \min\{S_), S_1, \ldots, S_{\widehat{N}}\}$, $a^+ = \max\{a, 0\}$.

Рассмотрим также арифметический азиатский опцион-колл [2]: $f_{\widehat{N}} = (\overline{S}_{\widehat{N}} - K_{\widehat{N}})^+$, где $\overline{S}_{\widehat{N}} = (\widehat{N}+1)^{-1}\sum_{k=0}^{\widehat{N}} S_k$.

Пусть начальные данные имеют вид: $S_0 = 6$, $B_0 = 1$, $K = 3$, $M_0 = 5$, $M_1 = 7$, $\widehat{N} = 9$, $\widehat{r}_1 = 0,3$, $\widehat{r}_2 = 0,4$, $\widehat{\sigma}_1 = 0,1$, $\widehat{\sigma}_2 = 0,2$. Тогда справедливая цена стандартного опциона-колл с последействием равна 5,68, а справедливая цена арифметического азиатского опциона-колл равна 1,87. При этом заметим, что при расширении «коридора» справедливые цены сходятся к значениям, вычисленным без изменения параметров, т. е. к 5,44 и 2,12 соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белявский Г. И., Данилова Н. В., Кондратьева Т. Н.* Расчеты для общей бинарной модели (B,S)-рынка. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 6, с. 982–993.
2. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 2004, т. 1, 2.