Е. В. К у т ы р е в а (Москва, ТВП)**. К вопросу о числе ненулевых элементов треугольника Паскаля над простым конечным полем и полем GF (2^n).**

Рассмотрим аналог треугольника Паскаля T_s [1, 2], состоящий из s строк элементов произвольного конечного поля GF (q), $q = p^l$, p — простое. В этом треугольнике элементы i-й строки $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_i^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, s-1$, получаются из элементов $(i+1)$-й строки $(x_1^{(i+1)}, x_2^{(i+1)}, \ldots, x_{i+1}^{(i+1)})$ по следующему правилу: $x_j^{(i)} = \alpha x_j^{(i+1)} + \beta x_{j+1}^{(i+1)}$, $j = 1, 2, \ldots, i$, где $\alpha, \beta \in \mathrm{GF}(q)^*$. Последняя s-я строка может быть произвольной. Обозначим ξ число ненулевых элементов в треугольнике T_s, s_0 — размер максимального треугольника T_{s_0}, состоящего целиком из нулевых элементов и содержащегося в треугольнике T_s.

Обозначим $r_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$, увеличенные на единицу количества строк между параллельными сторонами треугольников T_s и T_{s_0} и рассмотрим трапеции T_{r_i}, образованные данными r_i строками (вместе со сторонами треугольника T_s). В трапецию T_{r_i} не включаем элементы вне угла, образованного двумя сторонами треугольника T_{s_0}, не параллельными основаниям трапеции. Строку, следующую за стороной треугольника T_{s_0}, будем считать 0-й строкой соответствующей трапеции T_{r_i}.

Разобъем строки трапеции T_{r_i}, $i = 1, 2, 3$, на $[\log_p r] + 1$ групп по $(p-1)p^{j-1}$ строк, где j — номер группы, $j \in \{1, 2, \ldots, [\log_p r]\}$. Группа с номером 0 состоит из 0-й строки трапеции T_{r_i}, $i = 1, 2, 3$. Последняя группа может быть неполной. Пусть порядок элемента $-\alpha\beta^{-1}$ равен c.

Обозначим $M_s(\xi)$ число треугольников Паскаля с данным числом ненулевых элементов ξ. В [1] показано, что существует такая монотонная неограниченная последовательность рациональных чисел $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \cdots$, что для любого фиксированного $K > 0$ при $\xi \leqslant Ks$ и достаточно больших $s > S(K)$ имеем $M_s(\xi) = 0$, если $\xi \notin \cup_{i=0}^{\infty}(k_i s - \varepsilon_i, k_i s + \varepsilon_i)$, где ε_i $(i \geqslant 0)$ — некоторые неотрицательные константы.

Таким образом, при наличии относительно небольшого числа $\xi \leqslant Ks$ ненулевых элементов в треугольнике T_s величина ξ может принимать значения только из интервалов $(k_i s - \varepsilon_i, k_i s + \varepsilon_i)$ $(i \geqslant 0)$ для любых достаточно больших s.

Значение каждой точки $k_i \geqslant 0$ является суммой трех рациональных чисел $\chi(r_i)$, $r_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, соответствующих трем трапециям, окружающим нулевой треугольник T_{s_0}.

Строки данных трапеций периодичны. В [1] показано, что период строки трапеции T_{r_i}, $i = 1, 2, 3$, из группы с номером j равен cp^j, $j \in \{0, 1, \ldots, [\log_p r]\}$. Число $\chi(r_i)$, $i = 1, 2, 3$, представляет собой долю ненулевых элементов среди множества элементов, содержащего только элементы, находящиеся на полных периодах строк соответствующей трапеции.

Ниже для простого поля GF (p), $p > 2$, приведена таблица значений величин $\chi(r)$ по одной трапеции, состоящей из трех строк.

Таблица 1.

$\chi(1)$: 1; $\chi(2)$: $1 + \frac{p-1}{p}$; $\chi(3)$: $1 + \frac{p-1}{p} + \frac{p-2}{p}$, $1 + 2\frac{p-1}{p}$, $2 + \frac{p-1}{p}$.

Случай GF (2) подробно описан в работе [2].

В следующей таблице для поля GF (2^n), $n > 1$, приведены значения величин $\chi(r)$ по одной трапеции, состоящей из четырех строк.

Таблица 2.

$\chi(1)$: 1; $\chi(2)$: $\frac{3}{2}$, 2; $\chi(3)$: 2, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, 3; $\chi(4)$: $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, 3, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кутырева Е. В.* О числе ненулевых элементов треугольника Паскаля над конечным полем. — В сб.: Материалы конференции в МГУ: Математика и безопасность информационных технологий. М.: 2004.
2. *Малышев Ф. М.*, *Кутырева Е. В.* О распределении числа единиц в булевом треугольнике Паскаля. — Дискретн. матем., 2006, т. 18, № 2, с. 123–131.