И. А. Кареев (Казань, КФУ). **Нижняя граница для среднего объема выборки и эффективность процедур отбора.**

Рассматривается задача отбора одной из m популяций с наибольшим значением параметра $\theta \in \Theta \subseteq \mathbf{R}^1$. Предполагается, что распределение наблюдаемой случайной величины ξ_i, соответствующей i-й популяции, принадлежит семейству распределений $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$ со значениями $\theta = \theta_i$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Пусть $\theta_{[1]} \leqslant \theta_{[2]} \leqslant \dots \leqslant \theta_{[m]}$ — упорядоченные значения θ в популяциях.

Будут рассматриваться процедуры отбора, гарантирующие ограничение α на вероятность ошибки на параметрическом пространстве с зоной безразличия $\Theta_\Delta = \{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \in \Theta^m\colon \theta_{[m-1]} \leqslant r_\Delta(\theta_{[m]})\}$, где $r_\Delta(\theta) = r(\theta, \Delta)$, $\Delta > 0$, $\theta \in \Theta$ — такая функция, что $r_\Delta(\theta) < \theta$, $r_\Delta(\theta)$ строго возрастает по θ при каждом фиксированном Δ и строго убывает по Δ при каждом фиксированном θ. Примерами функции $r_\Delta(\theta)$ являются $r_\Delta(\theta) = \theta - \Delta$ для параметра сдвига и $r_\Delta(\theta) = (1 - \Delta)\theta$ для параметра масштаба.

Пусть

$$\omega(x, y) = x \ln \frac{x}{1 - y} + (1 - x) \ln \frac{1 - x}{y}, \quad x + y \leqslant 1,$$

есть функция Вальда, $I(\theta_i, \vartheta_i) = I(\theta_i, \vartheta_i \,|\, \xi_i)$ — различающая информация по Кульбаку–Лейблеру.

Будем далее для удобства записи предполагать, что $\theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \dots \leqslant \theta_m$.

Теорема 1. *Пусть различающая информация $I(a, b)$ строго убывает по b при $b < a$ и строго возрастает по b при $b > a$ при каждом $a \in \Theta$. Тогда для среднего объема выборки ν процедуры отбора, вероятность корректного отбора в которой при $\theta \in \Theta_\Delta$ не меньше $1 - \alpha (> 0,5)$, верна оценка*

$$\mathbf{E}_\theta \nu \geqslant \omega(\alpha, \alpha) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{I(\theta_i, r_\Delta^{-1}(r_t(\theta_m)))}, \quad \forall \theta \in \Theta_\Delta,$$

где t выбирается как наибольшее z, удовлетворяющее условиям $r_z(\theta_m) \in \Theta$, $r_\Delta^{-1}(r_z(\theta_m)) \in \Theta$,

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{I(\theta_m, r_z(\theta_m))}{I(\theta_i, r_\Delta^{-1}(r_z(\theta_m)))} \leqslant 1, \quad r_z(\theta_m) \geqslant \theta_{m-1}.$$

Доказательство теоремы основано на нижних границах для среднего объема выборки, полученных в работах Володина [1] и Малютова [2].

Пусть $\xi_i \sim \mathbb{N}(\theta_i, \sigma^2)$ и отбирается популяция с наибольшим средним, положим $r_\Delta(\theta) = \theta - \Delta$. Тогда

$$\mathbf{E}_\theta \nu \geqslant 2\sigma^2 \omega(\alpha, \alpha) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2}, \quad \text{где} \quad t = \frac{\theta_m - \theta_{m-1} + \Delta}{\sqrt{m-1} + 1},$$

$$\sup_{\theta \in \Theta_\Delta} \mathbf{E}_\theta \nu \geqslant \sigma^2 \frac{(\sqrt{m-1} + 1)^2}{2} \, \frac{\omega(\alpha, \alpha)}{\Delta^2}.$$

Исследуем асимптотическую ($\alpha \to 0$) эффективность процедур отбора Бекхоффера для нормальной модели. Под асимптотической эффективностью будем понимать величину

$$\mathfrak{E}(\theta) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\inf_{f \in G(\alpha)} \mathbf{E}_\theta \nu_f}{\mathbf{E}_\theta \nu_\varphi},$$

где φ — процедура отбора, эффективность которой рассматривается, а $G(\alpha)$ — множество всех процедур отбора, вероятность корректного отбора в которых не меньше $1-\alpha$ для любого $\theta \in \Theta_\Delta$.

Теорема 2. *Для асимптотической эффективности процедуры отбора Бекхоффера с фиксированным числом наблюдений* (см. [3]) *верны соотношения*:

$$\mathfrak{E}(\theta) \geqslant \frac{m-1}{m^2} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta^2}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2}, \quad \text{где} \quad t = \frac{\theta_m - \theta_{m-1} + \Delta}{\sqrt{m-1}+1},$$

$$\sup_{\theta\in\Theta_\Delta} \mathfrak{E}(\theta) \geqslant \frac{(m-1)(\sqrt{m-1}+1)^2}{4m^2}.$$

Результаты теоремы 2 усиливают результаты по эффективности процедуры отбора Бекхоффера, полученные в работе Новикова [3].

Теорема 3. *Для асимптотической эффективности последовательного варианта процедуры отбора Бекхоффера* (см. [4]) *верны соотношения*:

$$\mathfrak{E}(\theta) \geqslant \frac{2}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta(\theta_m - \theta_{m-1})}{(\theta_m - \theta_i + \Delta - t)^2}, \quad \text{где} \quad t = \frac{\theta_m - \theta_{m-1} + \Delta}{\sqrt{m-1}+1},$$

$$\sup_{\theta\in\Theta_\Delta} \mathfrak{E}(\theta) \geqslant \frac{(\sqrt{m-1}+1)^2}{2m}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Володин И. Н.* Нижние границы для среднего объема выборки в процедурах с управлением. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, в. 3, с. 630–631.
2. *Малютов М. Б.* Нижние границы для средней длительности последовательно планируемых экспериментов. — Изв. ВУЗов, сер. матем., 1983, № 11, с. 19–41.
3. *Новиков А. А.* Эффективность процедур отбора. — Исслед. по прикл. матем., 1984, т. 11, № 2, с. 43–51.
4. *Kao S. C.*, *Lai T. L.* Sequential selection procedures based on confidence sequences for normal populations. — Comm. Statist. A–Theor. Meth., 1980, v. 9, p. 1657–1676.