Ю. В. М а р т ы н е н к о (Ульяновск, УлГУ). **Об устойчивости метода вариационных сплайнов.**

Метод вариационных сплайнов (ВС) для решения задачи Коши $F(\dot{x}, x, t) = 0$, $x(t_0) = x^0$, сводит исходную задачу к конечномерной задаче нелинейного программирования. Решение получается в виде сплайна с подвижными узлами. Поэтому в общем случае достаточно сложно вывести какие-либо теоретические оценки качества решения аналогично тому, как это делается для конечно-разностных методов.

Однако, если применять метод к нормальной форме задачи Коши: $\dot{x} = f(x, t)$, $x(t_0) = x^0$, то можно получить как оценки погрешности решения, так и результаты по устойчивости.

Ранее (см. [1]) была получена функция устойчивости метода ВС для непрерывного сплайна произвольной степени. Доказано, что она является рациональной функцией с вещественными коэффициентами над полем комплексных чисел, т. е. она имеет такой же вид, как функция устойчивости неявных методов Рунге–Кутта (и может быть исследована по аналогичным методикам).

Рассмотрим частный случай: непрерывные сплайны первой и второй степени. Можно показать, что функции устойчивости имеют вид $R_1(z) = (1 - z^2/6)/(1 - z + z^2/3)$ для сплайна первой степени и $R_2(z) = (1 - z^2/15 + z^4/240)/(1 - z + 13z^2/30 - z^3/10 + z^4/80)$ для сплайна второй степени.

Необходимо проверить, удовлетворяют ли эти функции требованиям A- и L-устойчивости. Метод с рациональной функцией A-*устойчив* тогда и только тогда, когда: 1) $R(iy)| \leqslant 1$ для всех $y \in \mathbf{R}$; 2) $R(z)$ — аналитическая функция при $\operatorname{Re} z < 0$.

Первое требование называется I-*устойчивостью*. Если $R(z)$ является рациональной функцией вида $R(z) = P(z)/Q(z)$, то I-устойчивость эквивалентна условию, что для функции $E(y) = Q(iy)Q(-iy) - P(iy)P(-iy)$ выполняется $E(y) \geqslant 0$ для всех $y \in \mathbf{R}$.

Метод называется L-*устойчивым*, если он A-устойчив и $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что требования A-устойчивости выполнены, а L-устойчивости нет.

Таким образом, несмотря на принципиальные отличия между классическими конечно-разностными методами и методом ВС, можно все же провести некоторое сопоставление. Для его корректности число стадий метода Рунге–Кутта должно совпадать со степенью сплайна, и вычисление должно вестись по одинаковой сетке. Для численного эксперимента был выбран неявный 2-стадийный метод Рунге–Кутта 2-го порядка, являющийся A-устойчивым и не являющийся L-устойчивым. Оба метода решали тестовое уравнение Далквиста $\dot{x} = \lambda x$, $x(0) = 1$, на отрезке от 0 до 1 с шагом 0,1 при целых значениях λ от -5 до 5. Результаты показали, что оба метода дают погрешность одинакового порядка, т. е. метод ВС при условии сопоставимости с методом Рунге–Кутта не уступает ему по точности и при этом позволяет получить непрерывное решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мартыненко Ю. В.* Функция устойчивости метода вариационных сплайнов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 3, с. 441–442.