В. Г. Грудницкий (Москва, ВЦ РАН)**. Консервативная характеристическая форма законов сохранения сплошной среды и ее приложения.**

Уравнения, описывающие движение сплошной среды, впервые опубликовал Леонард Эйлер. Они предполагают, как минимум, непрерывность решения. Для их исследования был создан аппарат характеристик, предполагающий, соответственно, решение непрерывным. Когда возникла необходимость расчета течений с сильными ударными волнами, весь аппарат исследования оказался для этого непригодным. На основании уравнений Эйлера в это время рядом авторов была получена дивергентная (консервативная) система законов сохранения. В ней не производится линеаризация приращений функций и их потоков. Эти уравнения значительно улучшили ситуацию, но не исчерпали ее. В законах сохранения приращения разрывных функций и их потоков относятся к приращениям непрерывных координат. Это исключает возможность перехода к пределу на разрывах. Кроме того, для расчета разрывных решений логично было заменить характеристический аппарат аналогичным, допускающим разрывы. Это не было сделано. По-видимому, с этим связан ряд сохранившихся проблем, в частности, отсутствие достаточных условий устойчивости при расчетах разрывных течений.

В работах [1–3] законы сохранения преобразованы в консервативную, характеристическую форму, допускающую разрывы. Тождественное преобразование выполняется без введения ограничений. Опишем его на примере течения с одной пространственной переменной

$$\frac{\Delta_t \overrightarrow{\varphi}}{\Delta t} + \frac{\Delta_x \overrightarrow{F}}{\Delta x} = 0, \quad \overrightarrow{\varphi} = (\rho, \rho u, \rho E)^T, \quad \overrightarrow{F} = (\rho u, p + \rho u^2, (\rho E + p)u)^T. \tag{1}$$

В (1), в отличие от общепринятого, знак ∂, предполагающий локальную линеаризацию функций, логично заменять полным приращением Δ. Тождественная замена разностей потоков имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta_x \overrightarrow{F} &\equiv (\overrightarrow{F}_{b(n)} - \overrightarrow{F}_{a(0)}) \equiv (\overrightarrow{F}_n - \overrightarrow{F}_{n-1}) + (\overrightarrow{F}_{n-1} - \overrightarrow{F}_{n-2}) + \cdots + (\overrightarrow{F}_1 - \overrightarrow{F}_0) \\ &\equiv \overrightarrow{\left[\frac{F_n - F_{n-1}}{\varphi_n - \varphi_{n-1}}\right](\varphi_n - \varphi_{n-1})} + \cdots + \overrightarrow{\left[\frac{F_1 - F_0}{\varphi_1 - \varphi_0}\right](\varphi_1 - \varphi_0)} \equiv \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{V_i(\varphi_i - \varphi_{i-1})}.\end{aligned} \tag{2}$$

Теорема. *Преобразование* (2) *существует и единственно для любого совершенного газа, причем множество скоростей* $\overrightarrow{V}_i$ (*вообще говоря, бесконечное*) *скалярно, т. е. не зависит от номера уравнения* ($\overrightarrow{V}_i \Rightarrow V_i$).

Доказательство. Выражения в квадратных скобках в (2) имеют размерность скорости. Согласно принципу Галилея, для скоростей устойчивых возмущений имеет место $V(u+w) = V(u) + w$, где w — любая скорость (скорость системы координат). Из уравнения энергии имеем для всех i

$$V(u+w) = \Delta[(\rho e + p + \rho(u+w)^2/2)(u+w)]/\Delta[(\rho e + \rho(u+w)^2/2)] = V(u) + w. \tag{3}$$

Умножим (3) на знаменатель и раскроем круглые скобки. Получаем слева и справа степенные многочлены от w. Равенство (3) выполняется, если равны коэффициенты при всех степенях w, откуда

$$[u(\rho E + p)]/[\rho E] = [p + \rho u^2]/[\rho u] = [\rho u]/[\rho] = V(u). \tag{4}$$

Как известно, (4) есть условия Гюгонио на фронтах всех возмущений, возникающих при распаде произвольного разрыва. Устойчивость и единственность решения распада произвольного разрыва доказана достаточно давно. Теорема доказана.

Следствием теоремы является следующая консервативная форма записи законов сохранения

$$\Delta_t \overrightarrow{\varphi} + \frac{dt}{dx} \sum_{i=1}^{n} V_i \Delta_i(\overrightarrow{\varphi}) = 0, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{\Delta t}{\Delta x}. \tag{5}$$

В каждое уравнение (5) входят значения одной компоненты $\overrightarrow{\varphi}$ и безразмерные коэффициенты, общие для всех уравнений. В силу этого (5) являются характеристической, консервативной и квазилинейной (без линеаризации) формой записи законов (1). Для (5) ударные волны и контактные разрывы являются характеристиками (наряду с традиционными). Предельная форма (5) существует в любой точке течения, включая фронты разрывов. Преобразование (2)–(5) возможно проводить при учете диссипативных процессов и других «правых» частей.

На основании (5) получен универсальный способ определения необходимых и достаточных условий устойчивости при расчетах разрывных течений сжимаемого газа дивергентными схемами. Они обеспечивают также монотонность решений на разрывах (в декартовых координатах). Условия получены и проверены для ряда течений и схем: одно- и двумерных нестационарных течений, струйных течений и течений с учетом вязкости.

На базе (5) нами предложены консервативные характеристические схемы. По одной из них с сеткой на консервативных характеристиках успешно проведены достаточно сложные тестовые расчеты.

Второй способ является модификацией схемы Годунова. Он имеет «второй порядок», при сохранении монотонности и устойчивости. Эти новые свойства для схем «второго» порядка аппроксимации. Численное решение здесь моделируется системой взаимодействующих волн распада и имеет сплошной характер по времени и пространству. На каждом шаге при преобразовании нового разрыва в качестве исходных используются параметры «приходящих» волн распада, взаимодействие которых образует новое течение. Эти параметры задаются с учетом их эволюции во времени и пространстве. Усреднение параметров приходящих волн производится вдоль внешних границ нового течения. Затем используются стандартные процедуры распада произвольного разрыва с одним неизвестным параметром.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Грудницкий В. Г.* Достаточное условие устойчивости при явном построении разрывных решений системы уравнений Эйлера. — Доклады Академии наук, 1998, т. 362, № 3, с. 298–299.
2. *Grudnitsky V. G.* Sufficient conditions of stability for discontinuous solutions of the Euler equations. — Computational Fluid Dynamics Journal, 2001, v. 10, № 2, p. 334–337.
3. *Грудницкий В. Г.* Нелинейные проблемы законов сохранения сплошной среды. М.: Изд-во Спутник+, 2009.