Э. Ф. Х а й р е т д и н о в (Москва, НИИМ МГУ). **Заметки о пограничном слое на крыловом профиле.**

Крыловой профиль представляет собой тонкое цилиндрческое тело с закругленной передней кромкой, которое обтекается потоком воздуха в перпендикулярном к его образующим направлении. Аэродинамические сойства крылового профиля определяются, главным образом, характером обтекания верхей его поверхности, которое поэтому требует подробного рассмотрения.

Математическая задача о течении несжимаемой вязкой жидкости в пограничном слое на поверхности крыловолго профиля, обтекаемого однородным на безконечности ($V(x) \to V_\infty$ при $x \to \infty$) потоком, представляется уравнениями [1]:

$$uu_x + vu_y = V(x)V_x(x) + \nu(u_{yy} + u_{xx}), \quad u_x + v_y = 0, \tag{1}$$

$$y = 0\colon \quad u = v = 0, \quad y \gg x_1\colon \quad u = V(x),$$

$$0 \leqslant x < x_1\colon\ V_x(x) > 0, \quad V(0) = V_{xx}(0) = 0, \quad x = x_1\colon \quad V = V_1 > V_\infty, \quad V_x = 0,$$

$$x_1 < x_\infty\colon \quad V_x < 0, \quad x \to \infty\colon \quad V \to V_2 \quad (0 < V_2 < V_1), \quad V_x \to 0,$$

$V_1 \sim 100$ м/сек, $\nu \sim 10^{-6}$ м^2/сек, $x_1 \sim 1$ м.

Переходя к калиброванным переменным $\overline{x} = x/x_1$, $\xi = \overline{x}$, $\overline{y} = y/h(x)$, $h(x) = \varepsilon x_1 \overline{h}(\xi)$, $\overline{h}(\xi) = \sqrt{H(\xi)}$ ($\overline{h}(0) = H(0) = 1$), $\eta = \overline{y}$, $\varepsilon = \sqrt{\nu/(V_1 x_1)}$ (величину $h(x) > 0$ академик С. С. Григорян назвал *калибрующей* толщиной пограничного слоя; предполагается, что она — положительная дифференцируемая возрастающая функция, ограниченная при $x < \infty$), $V(x) = V_1\overline{V}(\xi)$, $u = V_1\overline{u}$, $\overline{u} = \overline{V}(\xi)F_\eta(\xi,\eta)$, $v = \varepsilon V_1 \overline{v}$,

$$\overline{v} = \overline{V}(\xi)\overline{h}(\xi)\left(\frac{1}{2}\frac{H_\xi}{H}\left(\eta F_\eta - F_\xi - \left(\frac{V_\xi}{V} + \frac{1}{2}\frac{H_\xi}{H}\right)F(\xi,\eta)\right),\right.$$

перепишем уравнения (1) в виде (черта над калиброванными переменными отпускается)

$$\begin{aligned} &F_{\eta\eta\eta} = HV_\xi(F_\eta^2 - 1 - FF_{\eta\eta}) - \frac{1}{2}H_\xi VFF_{\eta\eta} + HVJ_\xi - \varepsilon^2 W(\xi,\eta) \\ &(J_\xi = F_\eta F_{\xi\eta} - F_\xi F_{\eta\eta}, \quad W = (H/V)u_{xx}), \end{aligned} \tag{2}$$

$$0 \leqslant \xi < 1\colon \quad V_\xi(\xi) > 0, \quad V(0) = V_{\xi\xi}(0) = 0, \quad \xi = 1\colon \quad V = 1 > V_\infty, \quad V_\xi = 0,$$

$$1 < \xi < \infty\colon \quad V_\xi < 0, \quad \xi \to \infty\colon \quad V \to V_2 \quad (0 < V_2 < 1), \quad V_\xi \to \infty.$$

Поскольку $\varepsilon \sim 10^{-4} \ll 1$, то при $y \gg x_1 \Rightarrow \eta \gg 1$ и граничные условия представляются в виде

$$\eta = 0\colon \quad F = F_\eta = 0, \quad \eta = \infty\colon \quad F_\eta = 1.$$

В уравнении (1) сохранен член u_{xx}, который обычно отбрасывается. Вследствие этого в уравнении (2) появился член $\varepsilon^2 W$. Если величина $W < \infty$ при $x \to 0$, то этот член может быть отброшен. Но поскольку $V(0) = 0$, то необходимо выяснить условия, при выполнении которых величина W ограничена при $x \to 0$.

Так как $u = V(\xi)F_\eta(\xi,\eta)$, то

$$u_x = V_\xi F_\eta + V\left(F_{\xi\eta} - \frac{1}{2}\frac{H_\xi}{H}\eta F_{\eta\eta}\right), \quad u_{xx} = V_{\xi\xi}F_\eta + V_\xi\left(2F_{\xi\eta} - \frac{H_\xi}{H}\eta F_{\eta\eta}\right)$$

$$+V\left(F_{\xi\xi\eta} - \frac{H_\xi}{H}\eta F_{\xi\eta\eta} - \frac{1}{2}\frac{H_{\xi\xi}H - H_\xi^2}{H^2}\eta F_{\eta\eta} + \frac{1}{4}\frac{H_\xi^2}{H^2}(F_{\eta\eta} + \eta F_{\eta\eta\eta})\right).$$

Очевидно, что если выполнены условия

$$V_{\xi\xi}(0) = 0, \quad F_{\xi\eta}(0,\eta) = 0, \quad H(0) = 1, \quad H_\xi(0) = 0,$$

то, представляя функции $V(\xi)$ и $H(\xi)$ в виде рядов $V = k\xi + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 + \cdots$, $H = H_0 + H_2\xi^2 + \cdots$, решение уравненния (2) можно строить в виде функционального ряда $F(x,\eta) = f_0(\eta) + f_2(\eta)\xi^2 + f_3(\eta)\xi^3 + \cdots$.

В. Я. Шкадов [2] связал функции $V(\xi)$ и $H(\xi)$ равенством $HV = \xi$. При этом уравнение (2) примет вид

$$F_{\eta\eta\eta} = \frac{\xi V_\xi}{V}\left(F_\eta^2 - 1 - \frac{1}{2}FF_{\eta\eta}\right) - \frac{1}{2}FF_{\eta\eta} + \xi J_\xi.$$

Здесь $J_\xi = F_\eta F_{\xi\eta} - F_\xi F_{\eta\eta}$.

Важную роль в развитии теории пограничного слоя сыграла задача о пограничном слое на продольно обтекаемой полубесконечной пластине. Решение этой задачи может быть получено непосредственно при рассмотрении уравнения (2). Полагая $V \equiv 1$, $V_\xi = 0$, приведем его к виду $F_{\eta\eta\eta} = (1/2)H_\xi FF_{\eta\eta} + H(F_\eta F_{\xi\eta} - F_\xi F_{\eta\eta})$. Очевидно, что если положить $H_\xi = 1$, $H = H_0 + \xi$, то это уравнение имеет точное решение вида $F(\xi,\eta) = f_B(\eta)$, где функция $f_B(\eta)$ является решением краевой задачи $f_B(0) = f_B'(0) = 0$, $f_B'(\infty) = 1$ для уравнения $f_B'''(\eta) = -(1/2)f_B f_B''(\eta)$. Это уравнение вывел и оригинальным способом вычислил его решение H. Blasius [3]. Он нашел, что $f_B''(0) \approx 0,332$.

Касательное напряжение τ на пластине выразится формулой $\tau = (V/h)F_{\eta\eta}(\xi,0) = (V/h)f_B''(0) = 0,332(H_0+\xi)^{-1/2}$. Здесь H_0 — произвольная положительая константа. Блазиус принял ее равной нулю. Но этого нельзя было делать, потому что в этом случае величина W в уравнении (2) обращается в ∞ при $x \to 0$.

Сила трения X, действующая на переднюю часть пластины длиной L, выразится формулой

$$X = \int_0^L \tau\, d\xi = 1,328\left(\sqrt{H_0 + L} - \sqrt{H_0}\right).$$

Обычно рассматривают коэффициент сопротивления c_X, относя силу трения X к длине L: $c_X = X/L = 1,328(\sqrt{H_0 + L} - \sqrt{H_0})/L$. При $L = 0$ имеем $c_X = 0,664/h_0$ ($h_0 = \sqrt{H_0}$). При $L \gg 1$ имеем $c_X = 1,328/\sqrt{L}$.

Построенное решение содержит произвольную постоянную, адекватное значение котороой можно определить лишь по данным эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хайретдинов Э. Ф.* Новый подход к решению задачи о течении в пограничном слое. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 4, с. 724–726.
2. *Шкадов В. Я.* Об интегрировании уравнений пограничного слоя. — Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4, с. 730–732.
3. *Blasius H.* Grewnzschlichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. — Z. Math. u. Phis., 1908, v. 56, № 1.