О. В. З в е р е в, В. М. Х а м е т о в (Москва, МГИЭМ). **Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на компактном $(1,S)$-рынке.**

Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\in N_0}, P)$ задана согласованная случайная последовательность цен $\{S_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t\in N_0}$, $N_0 \triangleq \{0,1,\dots,N\}$, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$S_t = S_{t-1}(1+\rho_t), \quad S_t|_{t=0} = S_0 > 0, \tag{1}$$

где S_0 — не случайно, $\{\rho_t\}_{t\in N_1}$ — последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин, носитель распределения вероятностей которых равен $[a,b]$, причем $-1 < a < 0 < b < \infty$. Пусть $\{\gamma_t\}_{t\in N_0}$ — одномерная предсказуемая последовательность.

Обозначим $\mathrm{Re}\,^c_{N,m}$ такое множество мер, эквивалентых базовой мере P, что случайные величины $\{\rho_t\}_{t\geqslant 1}$ являются относительно любой меры $Q \in \mathrm{Re}\,^c_{N,m}$ независимыми в совокупности и одинаково распределенными. Множество таких $\{\gamma_t\}_{t\in N_0}$, что $\sup_{Q\in \mathrm{Re}\,^c_{N,m}} M^Q \exp\{-\sum_{t=1}^N (\gamma_t, \Delta S_t)\} < \infty$, обозначим D_1^N. Сужение множества D_1^N на $\{t_1,\dots,t_2\}$ обозначим $D_{t_1}^{t_2}$. Пусть φ: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^1$ — ограниченная борелевская функция, обозначаемая $\varphi(x)$. Положим $\varphi(S_N) = \varphi(x)|_{x=S_N}$ — платежное обязательство.

О п р е д е л е н и е 1. Меру Q^* назовем *наихудшей*, если выполняется равенство $\sup_{Q\in \mathrm{Re}\,^c_{N,m}} M^Q\varphi(S_N) = M^{Q^*}\varphi(S_N)$.

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{S_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t\in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению* (1). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *существует единственная вероятностная мера Q_N^*, являющаяся наихудшей мартингальной*;

2) $\operatorname{supp} Q_N^* = \{a,b\}^N$, *причем для любого t выполняется $q^* = Q_N^*(\rho_t = a)$, а $p^* = Q_N^*(\rho_t = b) = 1 - q^*$, где $q^* = b/(b+|a|)$.*

Обозначим

$$\overline{V}_t^{mc} \triangleq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in \mathrm{Re}\,^c_{N,m}} M^Q \left[\exp\left\{ \varphi(S_N) - \sum_{i=t+1}^N \gamma_i S_{i-1}\rho_i \right\} \Big| \mathcal{F}_t^S \right]. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда существует такая борелевская функция $\overline{V}_t^{mc}(x)$, что для любого t*:

1) $\overline{V}_t^{mc} = \overline{V}_t^{mc}(x)|_{x=S_t}$;

2) $D_t = \mathbf{R}^1$;

3) $\overline{V}_t^{mc}(x)$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\begin{aligned} &\{\overline{V}_{t-1}^{mc}(x) = \inf_{\gamma\in\mathbf{R}^1} [\overline{V}_t^{mc}(x(1+a))e^{\gamma x|a|}q^* + \overline{V}_t^{mc}(x(1+b))e^{-\gamma x b}p^*], \\ &\overline{V}_t^{mc}(x)|_{t=N} = e^{\varphi(x)}. \end{aligned} \tag{3}$$

О п р е д е л е н и е 2. Самофинансирующий портфель $\pi^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)_{t\in N_0}$ назовем *минимаксным*, если для любого t

$$\overline{V}_t^{mc} = M^{Q^*} \left[\exp\left\{ \varphi(S_N) - \sum_{i=t+1}^N \gamma_i^* S_{i-1}\rho_i \right\} \Big| \mathcal{F}_t^S \right].$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда существует самофинансирующий портфель $\pi^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)_{t\in N_0}$, причем для любого t*:

1)

$$\gamma_t^*(x) = \frac{1}{x(b+|a|} \ln \frac{\overline{V}_t^{mc}(x(1+b))}{\overline{V}_t^{mc}(x(1+a))};$$

2) β_t^* *удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\beta_t^* = \beta_{t-1}^* - S_{t-1}\Delta\gamma_t^*, \quad \beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^*;$$

3) *капитал* $X_t^{\pi^*}$ *портфеля* π^* *допускает представление* $X_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_t^{mc}$, *причем*:
i) $X_t^{\pi^*}|_{t=N} = \varphi(S_N)$ Q^*-*п. н.*;
ii) $X_t^{\pi^*} = X_0^{\pi^*} + \sum_{i=1}^t \gamma_i^* S_{i-1}\rho_i$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда решение рекуррентного соотношения* (3) *имеет вид*

$$\ln \overline{V}_t^{mc}(x) = \sum_{i=0}^{N-t} \varphi(x(1+a)^i(1+b)^{N-t-i})C_{N-t}^i (q^*)^i (p^*)^{N-t-i}.$$

З а м е ч а н и е 1. Можно выбрать β_0^* равным $\ln \overline{V}_0^{mc}$, а $\gamma_0^* = 0$.

З а м е ч а н и е 2. Решение рекуррентного соотношения (3) совпадает с известной формулой, приведенной в [1, с. 744].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Теория. Т. 2. М.: Фазис, 1998, 544 с.
2. *Фёльмер Г.*, *Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008, 496 с.
3. *Бояринцева Н. С.*, *Хаметов В. М.* Новая теорема о представлении мартингалов (Дискретное время). — Матем. заметки, 2004, т. 75, в. 1, с. 40–54.