Р. В. Хасанов (Москва, МГУ). **Максимизация полезности со случайным вкладом: новая постановка двойственной задачи.**

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ — банахово пространство классов эквивалентности относительно равенства $\mathbf{P}$-п. н. ограниченных случайных величин с обычной нормой. Сопряженным к L^∞ является банахово пространство $ba = ba(\mathbf{P})$ конечно-аддитивных ограниченных (знакопеременных) мер на $\mathcal{F}$, абсолютно-непрерывных относительно меры $\mathbf{P}$, с нормой полной вариации, где двойственность задается соотношением $\langle \mu, \xi \rangle = \mu(\xi) = \int_\Omega \xi \, d\mu$. Определим $ca = ca(\mathbf{P})$ — подпространство ba, состоящее из всех счетно-аддитивных (знакопеременных) мер. Известно, что для $\mu \in ba$ существует единственное разложение $\mu = \mu^r + \mu^s$, где $\mu^r \in ca$, μ^s — так называемая *чисто конечно-аддитивная мера* (см. [5]). Обозначим L^∞_+, ba_+, ca_+ – положительные конусы соответствующих пространств, f^* — преобразование Фенхеля–Лежандра функции f, а δ_A — выпуклый индикатор множества A (0 на A и $+\infty$ вне A) (см. [1]).

Пусть $\mathcal{C}$ — выпуклый конус в L^∞, содержащий отрицательный конус L^∞_-, $B \in L^\infty$ — случайная величина, интерпретируемая как случайный вклад (random endowment), $V\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ — монотонно невозрастающая выпуклая функция, $V(y) = +\infty$ для $y < 0$ и $V(y) \in \mathbf{R}$ для $y > 0$. В работе [2] рассматривалась следующая функция, двойственная к целевой функции в задаче максимизации ожидаемой полезности со случайным вкладом:

$$v(y) = \min_{\mu \in \mathcal{R}} \mathbf{E}\left[V\left(y\frac{d\mu^r}{dP}\right) + y\mu(B)\right], \tag{1}$$

где $\mathcal{R} = \{\mu \in ba_+ \colon \ \mu(\Omega) = 1, \ \mu(\xi) \leqslant 0$ для любого $\xi \in \mathcal{C}\}$. Эта формула имеет существенный недостаток: в ней присутствуют конечно-аддитивные меры. Другой подход к решению задачи максимизации полезности со случайным вкладом предложен в работе [3], где в основную и, соответственно, в двойственную задачи авторы ввели дополнительный параметр, что позволило избежать конечно-аддитивных мер в определении двойственной функции.

Цель данного дклада — показать, что двойственная функция (1) также может быть приведена к форме, не содержащей конечно-аддитивные меры.

Теорема.

$$v(y) = \min_{\mu \in (\mathcal{R} - ba_+) \cap ca_+} \mathbf{E}\left[V\left(y\frac{d\mu}{dP}\right) + y\mu(B) + yg(\mu, B)\right],$$

где

$$g(\mu, B) = \sup_{\eta + B \in L^\infty_+} \Bigl\{\mu(\eta) - \inf_{\xi \in \mathcal{C}} \operatorname{ess\,sup}(\eta - \xi)\Bigr\}. \tag{2}$$

З а м е ч а н и е. Описание множества $(\mathcal{R} - ba_+) \cap ca_+$, не использующее конечно-аддитивные меры, было получено А. А. Гущиным (частное сообщение).

Д о к а з а т е л ь с т в о. теоремы основано на двух вспомогательных утверждениях, первое из которых следует из определения преобразования Фенхеля–Лежандра.

Лемма 1. *Пусть* $S^{ba}_+(1) = \{\mu \in ba_+ \colon \ \mu(\Omega) = 1\}$. *Тогда* $(\operatorname{ess\,sup}(\xi))^*(\mu) = \delta_{S^{ba}_+(1)}(\mu)$.

Лемма 2. *Имеет место равенство* $\inf_{\xi \in \mathcal{C}} \operatorname{ess\,sup}(\eta - \xi) = \delta^*_{\mathcal{R}}(\eta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Левую часть равенства можно преобразовать к виду $-[\operatorname{ess\,sup}(\eta - \xi) + \delta_{\mathcal{C}}(\xi)]^\star(0)$. К паре функций $\varphi(\xi) = \operatorname{ess\,sup}(\eta - \xi)$ и $\psi(\xi) = \delta_{\mathcal{C}}(\xi)$ применима теорема 1 из [4]. Используя лемму 1 и арифметические преобразования, имеем $[\varphi(\xi)]^*(\mu) = \mu(\eta) + \delta_{S^{ba}_+(1)}(-\mu)$. Так как $\mathcal{C}$ — выпуклый конус, содержащий

L^{∞}_{-}, $[\delta_{\mathcal{C}}(\xi)]^*(\mu) = \delta_{\mathcal{C}^0}(\mu)$, где $\mathcal{C}^0 = \{\mu \in ba_+\colon\ \mu(\xi) \leqslant 0$ для любого $\xi \in \mathcal{C}\}$. В итоге, применяя теорему 1 из [4], получаем требуемое равенство.

Д о к а з а т е л ь с т в о. теоремы. Учитывая невозрастание функции V, правую часть равенства (1) можно привести к виду

$$v(y) = \min_{\mu+\nu\in\mathcal{R},\, \mu\in ca_+,\, \nu\in ba_+} \mathbf{E}\left[V\left(y\frac{d\mu}{dP}\right) + y\mu(B) + y\nu(B)\right].$$

Остается доказать, что $\min_{\nu\in(\mathcal{R}-\mu)\cap ba_+} \nu(B) = g(\mu, B)$ для $\mu \in \mathcal{R} - ba_+$. Принимая во внимание лемму 2, правую часть (2) преобразуем к виду $[\delta^*_{\mathcal{R}}(\eta) + \delta_{L^{\infty}_{+}-B}(\eta)]^*(\mu)$. Здесь снова применима теорема 1 из [4]. Учитывая, что $\delta^{**}_{\mathcal{R}}(\mu) = \delta_{\mathcal{R}}(\mu)$, так как $\mathcal{R}$ — выпуклый компакт в топологии $\sigma(ba, L^{\infty})$, а также то, что $[\delta_{L^{\infty}_{+}-B}(\eta)]^*(\mu) = \delta_{-ba_+}(\mu) - \mu(B)$, получаем требуемое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В. М.*, *Тихомиров В. М.*, *Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005.
2. *Cvitanic J.*, *Schachermayer W.*, *Wang H.* Utility maximization in incomplete markets with random endowment. — Finance and Stochastics, 2001, v. 5, № 2, p. 259–272.
3. *Hugonnier J.*, *Kramkov D. O.* Optimal investment with random endowments in incomplete markets. — Ann. Appl. Probab., 2004, v. 14, № 2, p. 845–864.
4. *Rockafellar R. T.* Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions. — Duke Math. J., 1966, v. 33, № 1, p. 81–89.
5. *Yosida K.*, *Hewitt E.* Finitely additive measures. — Trans. Amer. Math. Soc., 1952, v. 72, № 1, p. 46–66.