А. М. Бикчентаев, А. А. Сабирова (Казань, К(П)ФУ). **Мажорируемая сходимость по мере измеримых операторов и свойство Банаха–Сакса.**

Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, I — единица алгебры $\mathcal{M}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in \mathcal{M}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(I - P) < \varepsilon$. Множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ всех τ-измеримых операторов является $*$-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножения на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций. В $\widetilde{\mathcal{M}}$ вводится топология t_τ сходимости по мере [1]; $(\widetilde{\mathcal{M}}, t_\tau)$ является полной метризуемой топологической $*$-алгеброй. Для обозначения сходимости последовательности $(X_n) \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ к $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ в топологии t_τ используется запись $X_n \xrightarrow{\tau} X$; при этом говорят, что (X_n) сходится к X по мере τ.

Невозрастающую перестановку оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ обозначим $\mu_t(X)$. Множество τ-компактных операторов $\widetilde{\mathcal{M}}_0 = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}}\colon \lim_{t\to\infty} \mu_t(X) = 0\}$ является идеалом в $\widetilde{\mathcal{M}}$. Пусть m — мера Лебега на $\mathbf{R}$. Некоммутативное L_p-пространство Лебега ($0 < p < \infty$), ассоциированное с $(\mathcal{M}, \tau)$, может быть определено как $L_p(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}}\colon \mu(X) \in L_p(\mathbf{R}^+, m)\}$ с F-нормой (нормой для $1 \leqslant p < \infty$) $\|X\|_p = \|\mu(X)\|_p$. Пусть $|X| = \sqrt{X^*X}$ для $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Для семейства $\mathcal{L} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ обозначим $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^h$ его положительную и эрмитову части, соответственно. Частичный порядок в $\widetilde{\mathcal{M}}^h$, порожденный собственным конусом $\widetilde{\mathcal{M}}^+$, будем обозначать $\leqslant$.

С использованием свойства Банаха–Сакса для пространства $L_2(\mathcal{M}, \tau)$ в [2] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ и X_n, $X \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, $X \geqslant 0$ с $|X_n|^2 \leqslant X$ ($n \in \mathbf{N}$). Тогда существует подпоследовательность (X_{n_i}), средние арифметические*

$$\widetilde{X}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_{n_i} \tag{1}$$

которой t_τ-сходятся к некоторому оператору $\widetilde{X} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ с $|\widetilde{X}|^2 \leqslant X$.

Следствие [3, теорема 2.3]. *Пусть $0 < p \leqq 1$, $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ и X_n, $X \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, $X \geqslant 0$ с $|X_n|^2 \leqslant X^2$ ($n \in \mathbf{N}$). Тогда существует подпоследовательность (X_{n_i}), средние арифметические* (1) *которой сходятся в $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ к некоторому оператору $\widetilde{X}$ с $|\widetilde{X}|^2 \leqslant X^2$.*

В [2] получены примеры, показывающие необходимость перехода к средним арифметическим и существенность условия $X \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ в теореме 1.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ и X_n, $X \in \widetilde{\mathcal{M}}_0^h$, $Y_n = (1/n)\sum_{k=1}^{n} X_k$ и $X_n \leqslant X_{n+1} \leqslant X$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда существует такой $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}_0^h$, что $X_n \xrightarrow{\tau} Y$ и $Y_n \xrightarrow{\tau} Y$ при $n \to \infty$.*

Если $\tau(I) < \infty$, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ совпадает с $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ и состоит из всех замкнутых линейных операторов в $\mathcal{H}$, присоединенных к $\mathcal{M}$. При этом топология t_τ не зависит от конкретного выбора такого следа и является минимальной среди всех метризуемых топологий, согласованных со структурой кольца на $\widetilde{\mathcal{M}}$ [4].

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным конечным следом τ и X_n, $X \in \widetilde{\mathcal{M}}^h$, $n \in \mathbf{N}$. Пусть при некотором $p > 1$ существует такое число $C > 0$, что $\|X_n\|_p \leqslant C$ ($n \in \mathbf{N}$) и $X_n \xrightarrow{\tau} X$ при $n \to \infty$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \tau(X_n) = \tau(X)$.*

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (госконтракт № 02.740.11.0193).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nelson E.* Notes on non-commutative integration. — J. Funct. Anal., 1974, v. 15, № 2, p. 103–116.
2. *Бикчентаев А. М.*, *Сабирова А. А.* Мажорируемая сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана и средние арифметические измеримых операторов. — Сибирский матем. ж. (В печати.)
3. *Бикчентаев А. М.* К геометрии некоммутативных пространств L_p $(0 < p \leqslant 1)$. — Межвуз. сб. научных трудов: Функциональный анализ, № 31. Ульяновск: УлГПИ, 1990, с. 29–34.
4. *Бикчентаев А.М.* О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана. — Матем. заметки, 2004, т. 75, в. 3, с. 342–349.