Л. В. Б а в а р о в а, А. В. К а л и н к и н (Москва, МГТУ). **О квазистационарном распределении марковского ветвящегося процесса со схемой взаимодействий $\mathbf{2T \to T;\ T \to 0, 2T}$.**

Рассматривается однородный во времени марковский процесс рождения и гибели $\xi(t)$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, переходные вероятности $P_{ij}(t) = \mathbf{P}\,\{\xi(t) = j \,|\, \xi(0) = i\}$ которого при $t \to 0+$ представимы в виде ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$)

$$P_{i,i-1}(t) = (\lambda_2 i(i-1) + p_0\lambda_1 i)t + o\,(t), \quad P_{ii}(t) = 1 - (\lambda_2 i(i-1) + \lambda_1 i)t + o\,(t),$$
$$P_{i,i+1}(t) = p_2\lambda_1 it + o\,(t), \quad P_{ij}(t) = o\,(t), \quad j \neq i-1, i, i+1,$$

$p_0 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$, $p_0 + p_2 = 1$. Производящая функция переходных вероятностей $F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)s^j$, $|s| \leqslant 1$, удовлетворяет второму уравнению Колмогорова [3]

$$\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial t} = \lambda_2(s - s^2)\frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \lambda_1(p_2 s^2 + p_0 - s)\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s}, \quad F_i(0; s) = s^i. \qquad (1)$$

Для рассматриваемой автокаталитической реакции с кинетической схемой $2T \to T$; $T \to 0, 2T$ уравнение детерминированной модели имеет вид $\dot{x}(t) = \lambda_1(p_2 - p_0)x(t) - \lambda_2 x^2(t)$, $x(0) = x_0$ ($x(t)$ — количество реагента T). Решение ($p_0 \neq p_2$)

$$x(t) = \frac{\lambda_1(p_2 - p_0)x_0}{(\lambda_1(p_2 - p_0) - \lambda_2 x_0)e^{-\lambda_1(p_2 - p_0)t} + \lambda_2 x_0}. \qquad (2)$$

Пусть $p_2 > p_0$. Из (2) следует, что детерминированная модель $x(t)$ выходит при $t \to \infty$ на стационарный уровень $x_c = \lambda_1(p_2 - p_0)/\lambda_2 > 0$. Случайный процесс $\xi(t)$ длительное время находится в окрестности точки x_c, но с вероятностью 1 попадает, независимо от значений параметров, в поглощающее состояние 0. Пример реализации процесса приведен на рис. 1 ($\lambda_1 = 5,5$, $\lambda_2 = 0,1$, $p_0 = 0,1$, $p_2 = 0,9$, $i = 100$).

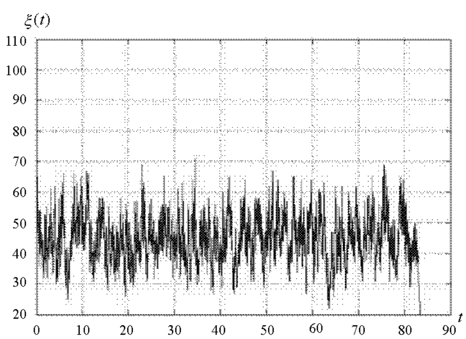

Рис. 1

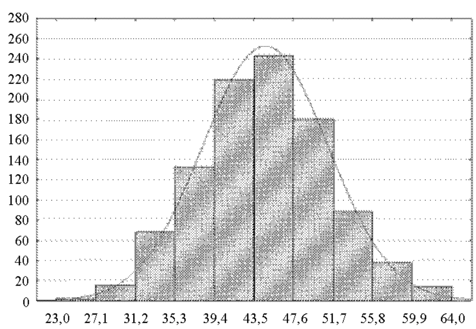
Рис. 2

В работе [1] доказано существование предельного условного распределения $q_j = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\,\{\xi(t) = j \,|\, \xi(t) > 0,\ \xi(0) = i\}$, $j = 1, 2, \ldots$, и сделано предположение, что квазистационарное распределение близко к нормальному. На рис. 2 приведена полученная методом Монте-Карло [2] гистограмма условного распределения, построенная по 1000 реализаций процесса $\xi(t)$ на временном промежутке $[0, 50]$. При больших λ_1 и $p_2 > 1/2$ гистограмма близка к плотности нормального закона.

Возможность аналитического вывода предельной теоремы при $\lambda_1 \to \infty$ связана с рассмотрением следуемого из (1) дифференциального уравнения второго порядка для производящей функции $f(s) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j s^j$ (a — константа)

$$\lambda_2(s - s^2)f''(s) + \lambda_1(p_2 s^2 + p_0 - s)f'(s) + a(f(s) - 1) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sirl D.* Limiting Conditional Distributions for a Class of Autocatalytic Chemical Reactions. — Centre of Excellence for Mathematics and Statistics of Complex Systems. Brisbane: University of Queensland, 2004, 8 p.
2. *Туркина Л. В.* Решение уравнений Колмогорова для марковских процессов рождения квадратичного типа. Дипломная работа. М.: МГТ, 2008, 99 с.
3. *Калинкин А. В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, в. 2, с. 23–84.