М. В. Бурнашев (Москва, ИППИ РАН). **О последовательном оценивании момента пересечения уровня гауссовским случайным блужданием по коррелированным наблюдениям.**

Для гауссовского случайного блуждания X со сносом рассматривается задача оценивания момента τ_A первого пересечения заданного уровня A по наблюдениям коррелированного с X процесса Y. В качестве оценки разрешается использовать любой момент остановки η относительно процесса Y. Как процесс Y рассматривается зашумленная версия процесса X. Для заданной функции потерь $f(x)$ находится точная асимптотика минимально возможного риска $\mathbf{E}f((\eta-\tau_A)/r)$ при $A \to \infty$, где r — нормировочный коэффициент.

1. Постановка задачи. Рассмотрим случайный процесс X с дискретным временем

$$X\colon\ X_0 = 0, \quad X_n = \sum_{i=1}^{n} V_i + sn, \qquad n \geqq 1,$$

где $s > 0$ — заданная постоянная, а $V_1, V_2, \ldots$ — независимые $\mathcal{N}(0,1)$–гауссовские случайные величины. Введем момент пересечения заданного уровня $A > 0$

$$\tau_A = \min\{n \geqq 0 : X_n \geqq A\}.$$

Предполагается, что неотрицательная функция потерь $f(x)$ удовлетворяет достаточно стандартным условиям (в частности, для некоторого $\alpha > 0$ растет не быстрее, чем $|x|^{\alpha}$ при $|x| \to \infty$). Функция $f(x)$ может быть несимметричной. Например, возможна функция $f(x) = (-x)^{p_1}, x \leqq 0$, $f(x) = x^{p_2}, x \geqq 0$ с $\min\{p_1, p_2\} > 0$.

Наблюдая последовательно процесс $Y = \{Y_n, n = 0, 1, \ldots\}$, коррелированный с X, необходимо оценить момент остановки τ_A наилучшим образом относительно функции потерь $f(x)$.

Наблюдаемый процесс Y имеет вид

$$Y\colon\ Y_0 = 0, \quad Y_n = X_n + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} W_i, \qquad n \geqq 1, \tag{1}$$

где $W_1, W_2, \ldots$ — независимые $\mathcal{N}(0,1)$–гауссовские случайные величины (независимые от $\{V_i\}$), и где $\varepsilon > 0$ известно.

Для заданного A и оценки η для величины τ_A введем функцию

$$q(A,\eta) = \mathbf{E}f\left(\frac{\eta-\tau_A}{r}\right), \qquad r = \varepsilon\sqrt{\frac{A}{s^3(1+\varepsilon^2)}}. \tag{2}$$

Нас интересует минимально возможная функция $q(A,\eta)$

$$q(A) = \inf_{\eta} q(A,\eta),$$

где инфимум берется по всем моментам остановки η относительно процесса Y из (1). Мы используем в (2) нормировку величиной r, так как для хороших оценок η и больших A нормированная разность $(\eta-\tau_A)/r$ будет примерно $\mathcal{N}(0,1)$–гауссовской случайной величиной, и такая нормировка позволяет избежать некоторые громоздкие коэффициенты. Мы рассматриваем только случай, когда положительные величины s, ε фиксированы и $A \to \infty$.

2. Основной результат. Введем величину

$$m(f) = \inf_{a} \mathbf{E}f(\xi + a), \qquad \xi \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Тогда имеет место

Теорема. *Для величины* $q(A)$ *справедлива формула*

$$q(A) = m(f) + o\,(1), \qquad A \to \infty.$$