Е. А. Д а н и л о в а (Москва, МГУ). **Исследование свойств решений одного нелинейного дифференциального уравнения.**

В статье [1] Gaetano Fiore дает следующее определение солитона: *солитонным* называется устойчивое решение типа бегущей волны $\varphi(x,t) = g(x - v\,t)$, отличное от константы, у которого $\varphi_x(x,t)$, $\varphi_t(x,t)$ быстро стремятся к нулю вне ограниченной области. Из них *солитонами* в [1] называются те решения солитонного типа, у которых $g' \geqslant 0$, и *антисолитонами* — те, у которых $g' \leqslant 0$.

В работе, представленной данным докладом, исследуются возможные решения солитонного типа для уравнения

$$\varphi_{xx}(x,t) - \varphi_{tt}(x,t) + a\,\varphi_t(x,t) = \sin(\varphi(x,t)) + \sin(3\,\varphi(x,t)),\ a \neq 0. \tag{1}$$

Теорема 1. *Уравнение* (1) *имеет следующие решения солитонного типа*:

1) *при* $a < 0$: а) *антисолитон и массив антисолитонов со скоростью* $|v| > 1$; б) *солитон и массив солитонов со скоростью* $|v| < 1$;

2) *при* $a > 0$: а) *антисолитон и массив антисолитонов со скоростью* $|v| < 1$; б) *солитон и массив солитонов со скоростью* $|v| > 1$;

3) *при любом* $a \neq 0$: а) *солитон и массив двух солитонов со скоростью* $v = 1$; б) *антисолитон и массив двух антисолитонов со скоростью* $v = -1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применив метод, аналогичный [1], будем искать решения в виде $\varphi(x,t) = g(x - v\,t)$. Сделаем замену $\xi = x - v\,t$, $v \neq 0$. Тогда вопрос сводится к исследованию свойств решений обыкновенного дифференциального уравнения $(1-v^2)\,g''(\xi) - a\,v\,g'(\xi) = \sin(g(\xi)) + \sin(3\,g(\xi))$, которое при $v \neq \pm 1$ эквивалентно системе

$$g'(\xi) = p(\xi),\ p'(\xi) = \frac{a\,v}{1-v^2}\,p(\xi) + \frac{\sin(g(\xi)) + \sin(3\,g(\xi))}{1-v^2}. \tag{2}$$

Решения уравнения (1) при $|v| \neq 1$ будут солитонного типа тогда и только тогда, когда решение $p(\xi)$ системы (2) будет быстро стремиться к нулю вне ограниченной области.

В случае $v = \pm 1$ решение может быть найдено явно путем перехода к обратной функции $\xi(g)$:

$$\xi - \xi_0 = C_0 - a\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\ln\left|\frac{1-\cos(g(\xi))}{\sin(g(\xi))}\right| - \frac{1}{\cos(g(\xi))}\right).$$

Отсюда видно, что $\xi \to -\infty$ при $g \to 2\pi k + 0$, и $\xi \to +\infty$ при $g \to \pi/2 + 2\pi k - 0$, причем в правой полуокрестности $g = 2\pi k$

$$\xi' = \frac{\mp a}{\sin(g(\xi)) + \sin(3\,g(\xi))} \sim \frac{\mp a}{4(g - 2\pi k) + \overline{o}\,(g - 2\pi k)},$$

а в левой полуокрестности $g = \pi/2 + 2\pi k$

$$\xi' = \frac{\mp a}{\sin(g(\xi)) + \sin(3\,g(\xi))} \sim \frac{\mp a}{4(g - \pi/2 - 2\pi k)^2 + \overline{o}\,(g - \pi/2 - 2\pi k)^2}.$$

Это значит, что найдено антисолитонное/солитонное решение при $v = \pm 1$ соответственно. Аналогично, каждый из остальных промежутков обратимости функции $\xi(g)$ дает решения солитонного типа: промежуток $(\pi/2 + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$ дает также антисолитонное/солитонное решение, а промежутки $(\pi + 2\pi k, 3\,\pi/2 + 2\pi k)$ и $(3\,\pi/2 + 2\pi k, 2\,\pi + 2\pi k)$ дают солитонные/антисолитонные решения при $v = \pm 1$ соответственно.

В случае $v \neq \pm 1$ рассмотрим особые точки системы (2): $g_1 = 2\pi k$, $k \in Z$; $g_{2,4} = \pm\pi/2 + 2\pi k$, $k \in Z$; $g_3 = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$. В окрестности $g_{2,4}$ имеем параллельные прямые с угловым коэффициентом $a\,v/(1-v^2)$. В клетках таблицы представлены типы особых точек g_1 и g_3 в формате «g_1/g_3».

Из таблицы видно, что при $a<0$ возможно наличие антисолитона со скоростью $|v|>1$ и солитона со скоростью $|v|<1$, а при $a>0$ возможно наличие антисолитона со скоростью $|v|<1$ и солитона со скоростью $|v|>1$.

Например, в случае $a \leqslant 4$ и $v < -4/\sqrt{|16-a^2|}$ все фазовые траектории будут стремиться к точкам типа $(2\pi k, 0)$, $k \in Z$. Поэтому $p(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$.

Таблица. Типы особых точек. У. — устойчивый, Н. — неустойчивый, у. — узел, с. — седло, ф. — фокус, в. у. — вырожденный узел, $v_1 = 4/\sqrt{|16-a^2|}$, $v_2 = 4/\sqrt{16+a^2}$.

Значения v	Значения a			
	$(-\infty,-4]$	$(-4,\,0)$	$(0,\,4)$	$[4,+\infty)$
$(-\infty,-v_1)$	У. у./с.	У. ф./с.	Н. ф./с.	Н. у./с.
$\{-v_1\}$	У. у./с.	У. в. у./с.	Н. в. у./с.	Н. у./с.
$(-v_1,-1)$	У. у./с.	У. у./с.	Н. у./с.	Н. у./с.
$(-1,-v_2)$	с./Н. у.	с./Н. у.	с./У. у.	с./У. у.
$\{-v_2\}$	с./Н. в. у.	с./Н. в. у.	с./У. в. у.	с./У. в. у.
$(-v_2,0)$	с./Н. ф.	с./Н. ф.	с./У. ф.	с./У. ф.
$0,v_2)$	с./У. ф.	с./У. ф.	с./Н. ф.	с./Н. ф.
$\{v_2\}$	с./У. в. у.	с./У. в. у.	с./Н. в. у.	с./Н. в. у.
$(v_2,1)$	с./У. у.	с./У. у.	с./Н. у.	с./Н. у.
$(1,v_1)$	Н. у./с.	Н. у./с.	У. у./с.	У. у./с.
$\{v_1\}$	Н. у./с.	Н. в. у./с.	У. в. у./с.	У. у./с.
$(v_1,+\infty)$	Н. у./с.	Н. ф./с.	У. ф./с.	У. у./с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fiore G.* On soliton and other travelling-wave solutions of a perturbed sine-Gordon equation. Preprint Matematica e Applicazioni, Universita' di Napol, 2007.