Н. В. Игнатьева (Чита, ЧитГУ). **О построении гармонических функций на кусочно-однородной плоскости с трещиной в виде луча.**

Рассмотрим задачу построения гармонических функций, имеющих заданные особые точки на плоскости $z = x + iy$, состоящей из двух полуплоскостей $D_1 (y < 0)$ и $D_2 (y > 0)$ проницаемости k_j в D_j, когда луч $L(x > 0, y = 0)$ является сильно проницаемой трещиной с параметром A. Пусть особые точки расположены в D_2. В параболических координатах ξ, η плоскости z: $x = \xi^2 - \eta^2$, $y = 2\xi\eta$, $0 < \eta < \infty$, или в декартовых координатах плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ задача для потенциалов $u_j(\xi, \eta)$ в D_j имеет вид

$$\partial_\xi^2 u_j + \partial_\eta^2 u_j = 0; \qquad \xi = 0: \quad u_2 = u_1, \quad k_2\, \partial_\xi u_2 = k_1\, \partial_\xi u_1, \tag{1}$$

$$u_2(\xi, 0) = u_1(-\xi, 0), \quad k_2\, \partial_\eta u_2(\xi, 0) + k_1\, \partial_\eta u_1(-\xi, 0) = A\, \partial_\eta^2 u_1(-\xi, 0), \tag{2}$$

где функция u_2 имеет особые точки заданной гармонической функции $f(\xi, \eta)$ (особые точки функции f расположены в D_2), $\partial_\xi^n = \partial^n / \partial \xi^n$. Представляя решение задачи (1), (2) в виде

$$u_1(\xi, \eta) = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} \varphi(\xi, \eta), \quad u_2(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \varphi(-\xi, \eta), \tag{3}$$

для функции $\varphi(\xi, \eta)$ в однородной полуплоскости $\eta > 0$ получим задачу

$$\partial_\xi^2 \varphi + \partial_\eta^2 \varphi = 0, \quad \varphi \sim f(\xi, \eta), \tag{4}$$

$$\varphi(\xi, 0) = \varphi(-\xi, 0), \quad \partial_\eta \varphi(\xi, 0) + \partial_\eta \varphi(-\xi, 0) = \frac{2}{\beta} \partial_\eta^2 \varphi(\xi, 0), \tag{5}$$

где $\beta = (k_1 + k_2)/A$. Полагая, что функция $f(\xi, 0)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье f_i, представим функцию $f(\xi, \eta)$ при $\eta \leqslant 0$, где она не имеет особых точек, в виде $f(\xi, \eta) = \int_0^\infty e^{\lambda\eta} f_i \sigma_i \, d\lambda$, где $\sigma_1 = \sin \lambda\xi$, $\sigma_2 = \cos \lambda\xi$ (по повторяющимся индексам $i = 1, 2$ суммируем). При этом имеет место следующая формула [1]:

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\beta t} [f(\xi, \eta - t) + f(-\xi, \eta - t)]\, dt = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda\eta} f_2 \sigma_2}{\lambda + \beta}\, d\lambda. \tag{6}$$

Отсюда решение задачи (4), (5) найдем в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) + \int_0^\infty e^{-\lambda\eta} a_i \sigma_i \, d\lambda, \qquad \eta \geqslant 0, \tag{7}$$

где $a_1 = -f_1$, $a_2 = [2\beta(\lambda + \beta)^{-1} - 1] f_2$. Следуя методу работы [1], с учетом равенств (6), (7) решение (3) задачи (1), (2) приведем к виду

$$u_1 = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} F_1(\xi, \eta) + \frac{2k_2}{A} \int_0^\infty e^{-\beta t} F_2(\xi, -\eta - t)\, dt,$$

$$u_2 = F_1(\xi, \eta) + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} F_1(-\xi, \eta) + \frac{2k_2}{A} \int_0^\infty e^{-\beta t} F_2(\xi, -\eta - t)\, dt,$$

где $F_1(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) - f(\xi, -\eta)$, $F_2(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) + f(-\xi, \eta)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах. — Дифференциальные уравнения, 2009, т. 45, № 6, с. 855–859.