М. С. Матвейчук, **А. М. Ионова** (Казань, НИИММ, Ульяновск, УлГПУ). **Регулярные меры в пространстве с сопряжением.**

Продолжено изучение мер в пространстве с сопряжением [1]. Оператор $\mathcal{J}$ в комплексном гильбертовом пространстве (г. п.) H с произведением $(.,.)$ называется *сопряжением*, если $(\mathcal{J}x, \mathcal{J}y) = (y, x)$ и $\mathcal{J}(\lambda x + \beta y) = \overline{\lambda}\mathcal{J}x + \overline{\beta}\mathcal{J}y$, для любых $x, y \in H$ и $\lambda, \beta \in C$. Множество $H_{\mathrm{Re}} := \{x \in H\colon\ \mathcal{J}x = x\}$ — вещественное г. п., $\dim H = \dim H_{\mathrm{Re}}$. Пусть $P := \{p \in B(H)\colon\ p = p^2,\ p = \mathcal{J}p^*\mathcal{J}\}$. Отметим, что $p \in P \Leftrightarrow p^* \in P$. P — аналог решетки $B^{pr}(H)$ всех ортогональных проекторов в H. Относительно *порядка*: $p \leqslant q \Leftrightarrow p = qp$ и *ортодополнения*: $p \to p^{\perp} := I - p$ — *квантовая логика.* При этом $p \in P$ — одномерный $\Leftrightarrow p = p_x := (\mathcal{J}x, x)(., \mathcal{J}x)x$, где $|(x, \mathcal{J}x)| = 1$; p_x — *ортогональный* $(p_x = p_x^*) \Leftrightarrow x \in H_{\mathrm{Re}}$. Пусть $\Pi := P \cap B^{pr}(H)$. Отметим, что $p \in \Pi \Leftrightarrow \mathcal{J}p\mathcal{J} = p$ и $p \in P$, Π изоморфно $B^{pr}(H_{\mathrm{Re}})$. Для любого $e \in \Pi$, $0 < e < I$ множество $H^e_{\mathrm{Re}} := \mathrm{lin}_R\{eH_{\mathrm{Re}} + ie^{\perp}H_{\mathrm{Re}}\}$ — вещественное г. п. Пусть $\mathcal{P}_e := \{p \in P\colon\ pH^e_{\mathrm{Re}} \subseteq H^e_{\mathrm{Re}}\}$. В силу $\mathcal{J}H^e_{\mathrm{Re}} = H^e_{\mathrm{Re}}$, $p \in \mathcal{P}_e \Leftrightarrow p^* \in \mathcal{P}_e$. $\mathcal{P}_e$ — *гиперболическая* логика. Можно показать, что $P = \cup_{e\in\Pi}\mathcal{P}_e$. Таким образом, P существенно богаче сферической и гиперболической логик. Оператор A — J-*вещественный*, если $A = JAJ$.

Отображение μ: $P \to C$ называется *мерой*, если $\mu(p) = \sum\mu(p_i)$ для любого разбиения $p = \sum p_i$. Мера μ — *вероятностная*, если $\mu(\cdot) \geqslant 0$ и $\mu(I) = 1$; — *эрмитова*, если $\overline{\mu}(p) = \mu(p^*)$ для всех p; — *косоэрмитова*, если $-\overline{\mu}(p) = \mu(p^*)$ для всех p; — *регулярная* если существует ядерный оператор T, для которого $\mu(p) = \mathrm{tr}(Tp)$ для всех p. Отметим, что если A ядерный, J-вещественный и косо сопряженный, то $\mathrm{tr}(Ap) = 0$ для всех p. Поэтому для регулярной меры оператор T можно выбрать так, что $T = A + iB$, где A, B — J-вещественные, самосопряженные, ядерные операторы. Основные результаты следующие.

Теорема 1. *Мера* $\mu(\cdot) = \mathrm{tr}(T\cdot)$ *регулярная вещественная* (*т. е.* $\mu(P) \subseteq R$) *тогда и только тогда, когда* $\dim H < +\infty$, *при этом* T *может быть выбран так, что* $T = \lambda I$, $\lambda \in R$.

Следствие. *Регулярная вероятность на* P *кратна следу.*

Теорема 2. *Пусть* A, B — J-*вещественные, самосопряженные ядерные операторы и* $\mu(\cdot) = \mathrm{tr}((A+iB)\cdot)$ — *регулярная мера. Следующие условия равносильны*: 1) μ — *эрмитова мера*; 2) $\mu(\Pi) \subseteq R$; 3) $B = 0$.

Теорема 3. *Пусть* A, B — J-*вещественные, самосопряженные ядерные операторы и* $\mu(\cdot) = \mathrm{tr}((A+iB)\cdot)$ — *регулярная мера. Следующие условия равносильны*: 1) μ *косоэрмитова мера*; 2) $\mathrm{Re}\mu(\Pi) = \{0\}$; 3) $A = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аристова М. А.*, *Матвейчук М. С.* Меры на проекторах с вероятностным ядром. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 2, с. 236.