Е. А. П ч е л и н ц е в (Томск, ТГУ). **Модификация процедуры Стейна для регрессии с зависимыми условно-гауссовскими шумами.**

Ч. Стейн [1] доказал, что выборочное среднее многомерного нормального распределения с размерностью $d \geqslant 3$ является недопустимой оценкой среднего и предложил оценку, которая строго доминирует оценку по методу наименьших квадратов (МНК) в смысле среднеквадратического риска. Результат Стейна обобщался в ряде работ. В докладе предлагается модификация процедуры Стейна для регрессионной модели с зависимыми условно-гауссовскими шумами. К этой модели сводится, в частности, проблема непараметрического оценивания в модели регрессии с непрерывным временем и семимартингальными шумами. Этот класс шумов позволяет описать воздействие помех импульсного типа и включает, например, процесс Леви, являющийся смесью белого шума и составного пуассоновского процесса.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство и $\mathcal{G}$ — под-σ-алгебра σ-алгебры $\mathcal{F}$. Пусть наблюдаемый процесс $Y = (Y_n)_{n\geqslant 1}$ описывается уравнением

$$Y_n = \theta + \varepsilon_n \xi_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $\theta \in \Theta = \{x \in \mathbf{R}^d\colon \|x\| \leqslant \theta_{\max},\, \theta_{\max} > 0\}$, $0 < \varepsilon_n < 1$ — числовая последовательность, причем $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, ξ_n — последовательность условно-гауссовских векторов относительно σ-алгебры $\mathcal{G}$ с нулевым средним и условной ковариационной матрицей $\mathcal{D}_n(\mathcal{G}) = \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_n' | \mathcal{G})$, т. е. $Law(\xi_n \,|\, \mathcal{G}) = \mathcal{N}_d(0, \mathcal{D}_n(\mathcal{G}))$.

Наряду с оценкой МНК $\widehat{\theta}_n = Y_n$, $n = 1, 2, \ldots$, для параметра θ рассмотрим следующую оценку:

$$\theta_n^* = \left(1 - \frac{c_n}{\|Y_n\|}\right) Y_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где c — параметр, конкретизируемый ниже. Обозначим разность среднеквадратических рисков этих оценок $\Delta_n(\theta) := r(\theta_n^*, \theta) - r(\widehat{\theta}_n, \theta)$.

Предположим, что:

$(\mathbf{C}_1)$ для всех $n \geqslant 1$ минимальное собственное значение матрицы $\mathcal{D}_n(\mathcal{G})$ удовлетворяет $\mathbf{P}$-п. н. неравенству $\lambda_{\min}(\mathcal{D}_n(\mathcal{G})) \geqslant \lambda_*$, где $\lambda_* > 0$ — известное число;

$(\mathbf{C}_2)$ для некоторой известной постоянной $a^* > 0$: $\mathbf{E}_\theta \lambda_{\max}(\mathcal{D}_n(\mathcal{G})) \leqslant a^*$.

Теорема. *Пусть для распределения шума в модели* (1) *выполнены условия* $(\mathbf{C}_1)$–$(\mathbf{C}_2)$. *Тогда для любых* $\theta \in \Theta$ *и* $d \geqslant 2$ *оценка* (2) *с* $c_n = \varepsilon_n^2 (d-1) \lambda_* \gamma_n$, *где*

$$\gamma_n = -\frac{\sum_{j\in m} 2^{(j-1)/2} (-\kappa_n)^{d-1-j} \Gamma((j+1)/2) + (-\kappa_n)^d I(\kappa_n)}{2^{d/2-1} \Gamma(d/2) \theta_{\max}},$$

$$\kappa_n = \theta_{\max}/(\varepsilon_n \sqrt{a^*}), \quad I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2/2}}{a + x}\, dx,$$

превосходит по среднеквадратической точности оценку МНК, *т. е. для всех* $n \geqslant 1$ *выполнено* $\Delta_n(\theta) < 0$.

Данный результат применяется в задаче непараметрического оценивания функции регрессии в модели с негауссовскими шумами, включающими импульсные воздействия. Заметим, что предложенная оценка (2) отличается от оценки Стейна и имеет перед ней некоторые преимущества в рассматриваемой модели с условно-гауссовскими шумами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stein C.* Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multi-variate normal distribution. — In: Procedings of the Third Berkeley Symposium on Math. Statist., Prob. V., 1956, № 1, p. 197–206.