Н. О. С е д о в а, **К. Г. С а ф и н а** (Ульяновск, УлГУ). **К задаче о синтезе цифровых нелинейных систем стабилизации.**

Современные цифровые системы управления часто состоят из нескольких распределенных в пространстве подсистем, связанных посредством телекоммуникаций. Совместное использование каналов связи многими пользователями приводит к тому, что интервалы между измерениями могут быть различными, часть информации может теряться при передаче, кроме того, необходимо учитывать запаздывание между моментом измерения и моментом приложения к системе управляющего воздействия, построенного на основе этого измерения (вычислительные и транспортные запаздывания). Величина такого запаздывания для каждого измерения также может различаться.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)), \tag{1}$$

где $t \in \mathbf{R}^+ = [0, +\infty)$, $\dot{x}(t)$ — правосторонняя производная функции x в точке t, $x(t)$ — вектор n-мерного действительного пространства $\mathbf{R}^n$ с нормой $|\cdot|$, $u(t) \in \mathbf{R}^m$, $g(t,x,y)$: $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$.

Пусть $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$ — возрастающая последовательность моментов переключения управления и существует такое $d > 0$, что $d_k = t_{k+1} - t_k \leqslant d$ для всех $k = 0, 1, \ldots$, τ_k — последовательность неотрицательных чисел, характеризующих запаздывания, $\tau_k \in [0, \tau]$ для всех $k = 0, 1, \ldots$

Будем искать управление для системы (1) в виде кусочно-постоянной функции

$$u(t) = k_0(x(t)) = k(x(t_k - \tau_k)) \quad \text{при} \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \tag{2}$$

Очевидно, систему (1), замкнутую управлением (2), можно рассматривать как систему с сосредоточенным переменным запаздыванием: $\dot{x}(t) = g_0(t, x(t), x(t - r(t)))$, где $g_0(t, x(t), x(t - r(t))) = g(t, x(t), k_0(x(t)))$, $r(t) = t - t_k + \tau_k$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$. Обозначим $r = d + \tau$, тогда $r(t) \in [0, r]$. Пусть x_t — элемент (банахова) пространства $C(n) = C([-r, 0], \mathbf{R}^n)$ с супремум-нормой $\|\cdot\|$, определяемый формулой $x_t(s) = x(t+s)$ для $s \in [-r, 0]$. Тогда $f(t, \varphi) = g_0(t, \varphi(0), \varphi(-r(t)))$ — функционал, определенный в области $\mathbf{R}^+ \times C(n)$ со значениями в $\mathbf{R}^n$. В итоге исследуемую систему можно записать в виде

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \tag{3}$$

Предположим, что $g(t, 0, 0) = 0$ для всех $t \in \mathbf{R}^+$, $k(0) = 0$. Очевидно, управление (2) является стабилизирующим для системы (1), если и только если нулевое решение системы (3) (асимптотически) устойчиво.

При исследовании системы (3) предполагается, что ее правая часть удовлетворяет условиям типа Каратеодори [3].

Для исследования устойчивости систем с запаздыванием, в особенности если система нелинейна, используется, как правило, прямой метод Ляпунова. Специфика рассматриваемых систем определила разделение этого метода на два самостоятельно развивающихся направления: метод функций и метод функционалов. Заметим, что для систем с переменным запаздыванием (прежде всего, линейных) известные достаточные условия устойчивости, полученные методом функционалов, в большинстве случаев зависят как от верхней границы запаздывания $r(t)$, так и от его производной $\dot{r}(t)$, причем существенным оказывается предположение $\dot{r}(t) \leqslant \nu < 1$, которое не выполняется для системы (3).

В ряде случаев конструктивные результаты об устойчивости для системы (3) можно получить на основе метода функций Ляпунова–Разумихина. Учитывая специфику системы (3), определим такую вспомогательную функцию следующим образом.

О п р е д е л е н и е. Функцию $V \in C(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^+)$, такую, что $V(t,0) = 0$, $V(t,x) \geqslant 0$, непрерывно дифференцируемую при $t \neq t_k$, назовем *функцией Ляпунова*. Ее производная в силу системы (3) для $t \neq t_k$ есть функционал $V'\colon \cup_{i=0}^{\infty}(t_i, t_{i+1}) \times C(n) \to \mathbf{R}$, определяемый формулой

$$V'(t,\varphi) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,\varphi(0)) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(t,\varphi(0))\right)^{\top} f(t,\varphi).$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Предположим, что существует такая функция Ляпунова* $V(t,x)$, *что если* $t \in \mathbf{R}^+$, $t \in (t_k, t_{k+1})$, $\varphi \in C(n)$ *и* $\max_{t_k-\tau_k-t \leqslant s \leqslant 0} V(t+s, \varphi(s)) \leqslant V(t, \varphi(0))$, *то* $V'(t,\varphi) \leqslant 0$. *Тогда для любого решения* $x(t) = x(t; t_0, \varphi_0)$ *системы* (3) *функция* $v(t)$, *определенная для* $t \geqslant t_0$ *равенством* $v(t) = \max_{t_k-\tau_k \leqslant s \leqslant t} V(s, x(s))$ *при* $t \in [t_k, t_{k+1})$, *не возрастает.*

На основе этой леммы можно обосновать результаты о различных видах устойчивости, аналогичные утверждениям работ [1, 2], и применять функции Ляпунова для обоснования стабилизирующих свойств управления вида (2) для различных линейных и нелинейных систем. С точки зрения практических задач важно, что условия стабилизации, получаемые на основе этого метода, накладывают ограничения лишь на величину r, так что для их проверки не требуется знать точные значения ни моментов измерения, ни моментов переключения управлений.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках постановления правительства РФ № 218.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А. С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: УлГУ, 2005.
2. *Седова Н. О.* Вырожденные функции в исследовании асимптотической устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений. — Матем. заметки, 2005, т. 8, № 3, с. 468–472.
3. *Седова Н. О.* Топологическая динамика неавтономного функционально-дифференциального уравнения с конечным запаздыванием. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 6, с. 1120–1123.